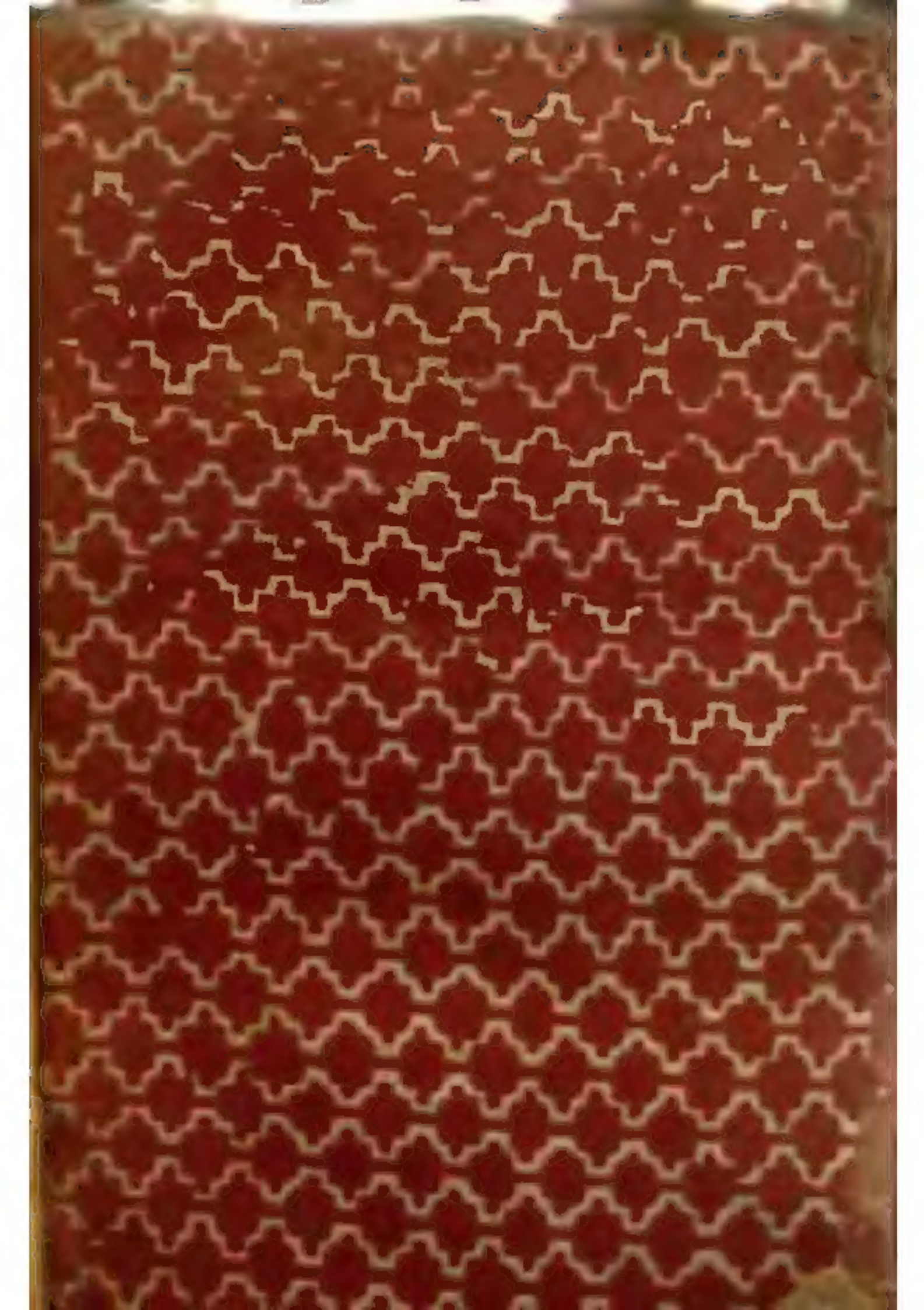


B-160518



1594-X⁵-3

GOODY
MILKMAN
1855







15-10518

—

5

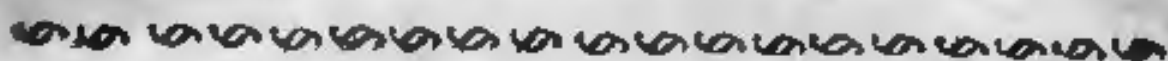
125
10518

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АРИΘΜΕΤΙΚΑ

Г. Леонгарда Ейлера.

Переведенная съ нѣмецкаго подлинника Ака-
деміи Наукъ адъюнктомъ Петромъ
Иноходцовымъ

и студентомъ Иваномъ Юдинымъ.



ТОМЪ ВТОРЫЙ,

въ которомъ предлагаются правила,
рѣшенія уравненій,

и Діофанскій образъ рѣшить вопросы.



Иванъ.

Тарасовъ.



при Императорской Академіи Наукъ 1769 года.

К



845011

РОСПИСЬ МАТЕРІАМЪ.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

объ алгебраическихъ уравненійхъ и ихъ рѣшеніи.

ГЛАВА I. о рѣшеніи задачъ вообще - стран. 1

—— II. объ уравненіяхъ первой степени и
ихъ рѣшеніи - - - - - 9

—— III. о рѣшеніи нѣкоторыхъ принадле-
жащихъ сюда вопросовъ - - 17

—— IV. о разрѣшеніи двухъ или больше
уравненій первой степени - - 38

—— V. о рѣшеніи чистыхъ квадратныхъ
уравненій - - - - - 59

—— VI. о рѣшеніи сиѣженныхъ квадра-
тныхъ уравненій - - - 73

—— VII. о извлеченіи корней изъ много-
угольныхъ чиселъ - - - 92

—— VIII. о извлеченіи квадратныхъ кор-
ней изъ биномія, или двучленного
числа - - - - - 101

—— IX. о свойствѣ квадратныхъ уравне-
ній - - - - - 118

—— X. о разрѣшеніи чистыхъ кубичныхъ
уравненій - - - - - 132

(2 ГЛА-

ГЛАВА XI.	о разрѣшеніи полныхъ кубичныхъ уравненій	- - - - -	142
— XII.	о правилѣ Кардана, или Сципiona Феррея	- - - - -	164
— XIII.	о разрѣшеніи уравненій четвертой степени, кои также и биквадратныя называются		177
— XIV.	о Помбеліевомъ правилѣ, биквадратныя уравненія приводить въ кубичныя	- - - - -	192
— XV.	о новомъ рѣшеніи биквадратныхъ уравненій	- - - - -	200
— XVI.	о разрѣшеніи уравненій чрезъ приближеніе	- - - - -	212

ЧАСТЬ ПЯТАЯ.

О неопредѣленной аналитикѣ

ГЛАВА I.	о разрѣшеніи такихъ уравненій, въ которыхъ больше нежели одно неизвѣстное число находится.		231
— II.	о правилѣ такъ называемомъ слѣпомъ, гдѣ изъ двухъ уравненій при или больше неизвѣстныхъ чиселъ опредѣляются	- - - - -	260
			III.

ГЛАВА III о составныхъ неопредѣленныхъ
уравненіяхъ , въ которыхъ первая
только степень неизвѣстнаго числа
находится - - - - - 272

— — — IV. о способѣ извлекаемую формулу
 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ сдѣлать извлека-
емой - - - - - 280

— — — V. о случаяхъ, въ которыхъ формула
 $a+bx+cx^2$ никогда квадратомъ быть
не можетъ - - - - - 309

— — — VI о случаяхъ въ которыхъ формула
 $axx+b$ будетъ квадратъ въ целыхъ
числахъ - - - - - 327

— — — VII. о особливомъ способѣ формулу
 $axx+1$ сдѣлать квадратомъ въ цѣ-
лыхъ числахъ - - - - - 346

— — — VIII. о способѣ извлекаемую формулу
 $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3}$ сдѣлать рациона-
льною - - - - - 354

— — — IX. о способѣ извлекаемую формулу
 $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ сдѣлать извле-
комой - - - - - 380

— — — X. о способѣ формулу $\sqrt[3]{a+bx+cx^2+dx^3}$ сдѣлать рациональною 401
XII
(2

ГЛАВА XI.	о разрѣшеніи на множителей	
	формулы $axx+bx+c$	418
— —	XII. о превращеніи формулы $axx+c$	
	въ квадраты, или въ вышнія сте-	
	пени	440
— —	XIII. о нѣкоторыхъ формулахъ сего	
	рода ax^2+by^2 , кои въ квадратами	
	сдѣлать не можно	461
— —	XIV. разрѣшенія нѣкоторыхъ вопро-	
	совъ принадлежащихъ до сей часи	
	Аналитики.	483
— —	XV. о разрѣшеніи вопросовъ въ кото-	
	рыхъ требуются кубы.	557

конецъ разписи.

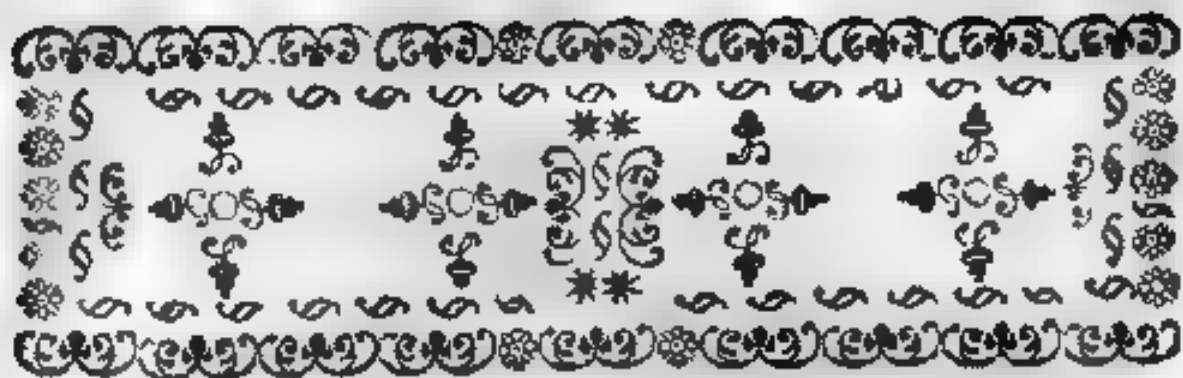


ПОГРѢШНОСТИ.

страниц.	строка	напечатано	чтѣй
11	3	$\pm a$	$\pm a$
—	4	$\pm 2a$	$\pm 2a$
34	1	$a c - x$	$a c - x$
45	6	$2y = 18^e x$	$2y = 18$
52	9	19^3	$19\frac{1}{2}$
58	1	$\frac{1}{4}b$	$\frac{1}{2}f$

страни.	строка	напечатано	читай.
62	8	$\frac{cx+f}{gx+b}$	$\frac{cx+f}{gx+b}$
82	5	$\frac{27}{a}$	$\frac{27}{a}$
85	4	$V(\frac{1}{2}+11a)$	$V(\frac{1}{2}+110)$
89	19	$100-x$	$100-x$
92	16	V	Π
93	2, 3, 4, 5, 6, 7,	V	Π
107	6	$\frac{V(a-c)}{2}$	$\frac{V(a-c)}{2}$
108	10	$b=\frac{1}{2}; -3$	$b=\frac{1}{2}; -3$
128	10	$fax+xxgx+b=0$	$fax+xxgx+fbx_x=0$
136	20	$xc=0$	$x-c=0$
145	3	$b=pq+pr+qr$	$b=pq+pr+qr$
152	21	q	8
155	4	124	$124x$
197	3	$x=5+V\frac{1}{2}$	$x=\frac{5}{2}+V\frac{1}{2}$
202	8	$g=\frac{bb}{12}$	$b=\frac{bb}{12}$
203	14	$V9=\frac{1}{2}b$	$Vb=\frac{1}{2}b$
228	22	частыя	частыя
236	14	$2y=7z+x$	$2y=7z+1$
246	4	останется, б,	останется. 2.
306	12	$1681=412$	$1681=41^2$
319	21	$25nn+19n+1$	$25nn+10n+1$
342	21	поставь -г, вмѣсто г	поставь г, вмѣсто -г
350	15	$n=\frac{p+V(1pp-2)}{2}$	$n=\frac{p+V(1pp-2)}{2}$
352	28	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$
356	3	$q=\frac{2r+V(13rr-31)}{2}$	$q=\frac{2r+V(13rr-31)}{2}$

страни.	строка	напечатано	читай.
361	16	$n = \frac{cp + \sqrt{c^2 p^2 + pp - 2}}{2}$	$n = \frac{cp + \sqrt{c^2 p^2 + pp - 2}}{2}$
369	18	$= ff + 2fp$	$= ff + 2fp x$
372	15	$= ff + dx^4$	$= ff + dx^3$
388	3	$x = \frac{d}{e}$	$x = \frac{d}{-e}$
412	7	$\frac{1 - 3y + 3yy - 3y^3}{(1-y)^3}$	$\frac{1 - 3y + 3yy - 3y^3}{(1-y)^3}$
428	22	$y = 1 -$	$y = 1,$
445	2, 3.	$xx + yy = (pp + qq)^2$	$xx + yy = (fp + qq)$
454	3	$c = 7x = 5p^3 - 21pqq$	$c = 7; x = 5p^3 - 21pqq$
—	22	когда	тогда
458	15	$(x + y \sqrt{c})$	$(x + y \sqrt{-c})$
—	16	$(x - y \sqrt{c})$	$(x - y \sqrt{c})$
464	9	$x^4 - y^4$	$x^4 + y^4$
485	5	$x = \frac{as^4 - 22r^2ss + r^4}{4r^2ss}$	$x = \frac{as^4 - 22r^2ss + r^4}{4r^2ss}$
—	12	$x + y = \frac{166}{9}$	$x + y = \frac{162}{9}$
491	21	xx и yy	xx и yy
492	17	$y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq}$	$y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq}$
495	15	$\frac{2 - 2c - d}{5}$	$\frac{2 - 2c - d}{5}$
506	11	$= \frac{b^2}{a^2} + \frac{2p(b-a)x + b(b-a)^2 x}{b-a}$	$= \frac{b^2}{a^2} + \frac{2p(b-a)x + b(b-a)^2 x}{b-a}$
517	2	$s + r = 2f$	$s + r = 2f$
529	17	$x = pp - acc$	$x = bb - acc$
549	14	$= \frac{676}{9} - \frac{23}{2}$	$= \frac{676}{9} p - \frac{52}{2}$
555	19	$= \frac{12}{2}$	$= \frac{12}{2} p$



ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ, объ алгебраическихъ уравне- нїяхъ и о ихъ рѣшенїи.



ГЛАВА I.

О рѣшенїи задачъ вообще.

§63.

Главное намѣренїе алгебры, такъ какъ
и прочихъ частей математики, кло-
нилося шуда, чтобъ опредѣлить ве-
личину неизвѣстныхъ количествъ, что
дѣлается изъ подробнаго разсмотренїя
обстоятельствъ въ вопросѣ предписан-
Толѣ II. А ныхъ,

2 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

ныхъ , и означенныхъ извѣстными количествами. Чего ради алгебру опредѣлить можно и симъ образомъ , то есть , что въ ней показывается , какимъ образомъ изъ данныхъ или извѣстныхъ количествъ находить неизвѣстные.

564.

Сіе сходствуемъ со всѣмъ тѣмъ , что по сіе мѣсто уже предложено было. ибо вездѣ изъ данныхъ количествъ исканы были такіе , которые прежде какъ неизвѣстные мы брали. Первой пому примѣръ даетъ сложене , гдѣ данныхъ двухъ или больше чиселъ находили мы сумму, то есть , такое число , которое даннымъ числамъ вмѣстѣ взятымъ равно было.

Въ вычитаніи искали мы число равное разности двухъ данныхъ чиселъ.

Самое то же примѣчается въ умноженіи , дѣленіи , въ возвышеніи до степеней и извлеченіи корней , гдѣ всегда изъ данныхъ чиселъ находится неизвѣст-

— 50 —

565.

565.

Въ послѣдней части разрѣшили уже мы нѣкоторые вопросы, при чемъ всегда искали такое число, которое изъ другихъ данныхъ чиселъ по нѣкоторымъ обстоятельствамъ опредѣлить должно было.

Чего ради всѣ вопросы клонятся туда, чтобъ изъ данныхъ нѣкоторыхъ чиселъ находить новое, состоящее съ прежними въ нѣкоемъ союзѣ, которой опредѣляется по нѣкоторымъ обстоятельствамъ или свойствамъ принадлежащимъ къ искомому числу.

566.

Во всякомъ вопросѣ искомое число означается послѣдними буквами алфавита, и смотрится на предписанныя въ немъ обстоятельства, которые даютъ уравненіе между двумя числами. Изъ такого уравненія должно попомъ опредѣлить величину искомаго числа, чрезъ что разрѣшился и самой вопросъ. Случаются иногда вопросы, гдѣ ищется

4 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

больше нежели одно число, но что равнымъ образомъ чрезъ уравненія совершается,
567.

Сіе можно лучше изъяснить самимъ примѣромъ. Представь себѣ вопросъ такой :

20 человекъ мужчины и женщины вмѣстѣ ѣдятъ въ трактирѣ, мужчина платитъ 8 грош., а женщина 7 грош. вся же сумма денегъ, которую они хозяину заплатили дѣлаетъ 6 талеровъ; спрашивается, сколько мужчинъ, и сколько женщинъ въ томъ числѣ было ?

Для рѣшенія сего вопроса положи число мужчинъ $= x$, и поступай съ нимъ такъ какъ съ известнымъ количествомъ, то есть, какъ будто бы хотѣлъ опробовать рѣшившись заданной вопросъ, ежели число мужчинъ положится x , когда же мужчины и женщины вмѣстѣ дѣлаютъ 20 человекъ, то можно отсюда опредѣлить и число женщинъ, которое выйдетъ ежели число мужчинъ вычтется изъ 20, по чему число женщинъ $= 20 - x$. Каждой
мужина

мущина платитъ 8 грошей, слѣдов.
 x мущинъ заплатятъ $8x$ грошей. Каждая
 женщина платитъ 7 грош., то $20-x$
 женщинъ заплатятъ $140-7x$ грош. слѣ-
 довательно мущины и женщины вмѣстѣ
 платятъ $140+x$ грош.; а мы знаемъ
 сколько они исплатили, то есть 6 рейхс-
 талеровъ, которые въ грошахъ дѣлаютъ
 144, чего ради будемъ мы имѣть сіе
 уравненіе $140+x=144$, откуда ясно
 видно, что $x=4$.

И такъ въ практирѣ было 4 мущи-
 ны и 16 женщинъ.

568.

Другой подобной сему вопросъ.

20 человекъ женщины и мущины вмѣ-
 стѣ были въ практирѣ; мущины пла-
 тятъ 24 гулдена, и женщины также 24
 гулдена, при чемъ извѣстно, что каждой
 мущина долженъ былъ платить одинъ
 гулденъ больше нежели женщина, спра-
 шивается; сколько было мущинъ и
 сколько женщинъ?

А 3

Пусть

6 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

Пусть будетъ число мужчинъ $=x$,
то число женщинъ будетъ $=20-x$
и когда x мужчинъ вмѣстѣ истратили
24 гулдена, то каждой изъ нихъ запла-
тилъ $\frac{24}{x}$ гулд.

$20-x$ женщинъ истратили 24 гулдена,
то каждая изъ нихъ издержала $\frac{24}{20-x}$ гулд.
и поелику сія издержка женщины однимъ
гуldenомъ меньше, нежели издержка му-
жины, то ежели изъ заплаченной суммы
денегъ мужиною вычтется 1 гуldenъ,
останется издержка женщины, откуда
получился уравненіе $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$, и изъ
сего уравненія надлежитъ искать вели-
чину x , которую не такъ легко здѣсь
вывести можно, какъ въ первомъ вопро-
сѣ. Но въ слѣдующихъ увидимъ, что
 $x=8$ сходствуетъ съ найденнымъ ура-
венненіемъ $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}; 2 = 2$.

§69.

Въ каждомъ вопросѣ главное дѣло
состоитъ въ томъ, чтобъ означивъ
буквами неизвѣстныя или искомые коли-
чества

чества разсмотрѣть прочіе обстоятельство вопроса, и изъ нихъ вывести уравненіи ; потомъ разрѣшить найденное уравненіе , или сыскать величину неизвѣстныхъ чиселъ , о чемъ въ сей части говорено будетъ.

570.

Самые вопросы разнятся также между собою, ибо въ нѣкоторыхъ ищется только одно число, а въ иныхъ 2 или больше ; и въ семъ послѣднемъ случаѣ требуется столькожъ уравненій , сколько неизвѣстныхъ или искомыхъ количествъ въ немъ будетъ, которые всѣ выводить надобно изъ обстоятельствъ вопроса.

571.

И такъ уравненіе состоитъ изъ двухъ членовъ , изъ коихъ одинъ другому равенъ полагается ; а что бы изъ уравненія опредѣлить величину неизвѣстнаго количества , потребны бываютъ часто весьма многіе переменны , кои всѣ основаніе свое имѣютъ на томъ , что

8 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

когда количества равны между собою , равны будутъ также , ежели къ обѣимъ изъ нихъ одинаке величины придадутся , или изъ нихъ вычтутся ; равнымъ образомъ , ежели они оба на одно какое нибудь число умножатся или раздѣлятся , ежели они до одинакой степени возвысятся , или одинаке корни изъ нихъ извлекутся , и наконецъ ежели обоимъ ихъ возмутся логарифмы , что уже и въ прежней части учинено было.

572.

Тѣ уравненія , въ которыхъ кромѣ первой степени не извѣстнаго числа не находится , весьма легко рѣшаются , и называются уравненіями первой степени. Потомъ слѣдуютъ уравненія , въ которыхъ въпоря степень или квадрашъ не извѣстнаго количества находится , и называются квадрашныя уравненія , или уравненія второй степени ; уравненія третьей степени , гдѣ кубъ не извѣстнаго количества находится , и такъ далѣе , о чемъ въ сей части объявлено будетъ.

ГЛАВА



ГЛАВА II.

Объ уравненіяхъ первой степени и ихъ
рѣшеніи.

§73.

Если неизвѣстное, или искомое количество означився буквою x , и найденное уравненіе будетъ уже на одной сторонѣ знака $=$ имѣть одно только x , а на другой всѣ данныя числа, какъ $x=25$, то искомая величина x , уже дѣйствительно имѣется; и всегда стараться надобно дойти до сей формулы, какъ бы смѣшено ни было первое уравненіе. На сей конецъ въ слѣдующихъ предпишутся правила.

§74.

Начнемъ сперва съ самыхъ легкихъ случаевъ, и положимъ, что нѣкиво дошелъ до сего уравненія :

$x+9=16$, то видно, что $x=7$.

Пусть будетъ вообще $x+a=b$, гдѣ a и b означаютъ данныя числа, какіябы

10 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

они ни были. Здѣсь должно съ обѣихъ сторонъ вычесть a , и получится уравненіе $x = b - a$, которое опредѣляетъ намъ величину x .

§75.

Если найденное уравненіе будетъ $x - a = b$, то придай съ обѣихъ сторонъ a , и будетъ $x = b + a$, что означаетъ величину x .

Точно также поступать надлежитъ, ежели первое уравненіе будетъ $x - a = aa + 1$; ибо тогда $x = aa + a + 1$, изъ уравненія $x - 8a = 20 - 6a$ получится $x = 20 - 6a + 8a$ или $x = 20 + 2a$, а изъ $x + 6a = 20 + 3a$ найдется $x = 20 + 3a - 6a$, или $x = 20 - 3a$.

§76.

Когда же найденное уравненіе будетъ $x - a + b = c$, то здѣсь можно съ обѣихъ сторонъ прибавить a , и выйдетъ $x + b = c + a$, потомъ вычесть съ обѣихъ сторонъ b , и будетъ $x = c + a - b$. Можно также съ обѣихъ сторонъ прибавить другъ $+a - b$, и будетъ $x = c + a - b$, такъ

такъ въ слѣдующихъ примѣрахъ , когда $x-2a+3b=0$, то будетъ $x=2a-3b$ когда $x-3a+2b=25+a+2b$, то будетъ $x=25+4a$, и когда $x-9+6a=25+4a$, то $x=34-4a$.

577.

Если найденное уравненіе имѣтъ будетъ формулу $ax=b$, то раздѣли съ обѣихъ сторонъ на a , и будетъ $x=\frac{b}{a}$. А когда $ax+b=c+d$, то должно сперва то, что при ax находится отнять прочь, то есть, прибавить съ обѣихъ сторонъ $-b+c$, и будетъ $ax=d-b+c$, сего ради $x=\frac{d-b+c}{a}$.

Пусть будетъ $2x+5=17$, то выдетъ $2x=12$, и $x=6$
 $3x-8=7$ выдетъ $3x=15$, и $x=5$
 $4x-5-3a=15+9a$, выдетъ $4x=20+12a$
 и $x=\frac{20+12a}{4}=5+3a$.

578.

Когда уравненіе будетъ $\frac{x}{a}=b$, то помножь съ обѣихъ сторонъ на a и будетъ $x=ab$. И когда $\frac{x}{a}+b=c+d$, то сперва

ва будетъ $\frac{x}{a} = d - b + c$ и попомъ $x = (d - b + c)a = ad - ab + ac$.

Пусть будетъ $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, то будетъ $\frac{1}{2}x = 7$,
и $x = 14$

----- $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a$; $\frac{1}{3}x = 4 - a$, и $x = 12 - 3a$
----- $\frac{x}{a-1} - 1 = a$ ----- $\frac{x}{a-1} = a + 1$; $x = (a + 1)(a - 1) = aa - 1$.

579.

Если уравненіе будетъ $\frac{ax}{b} = c$, то умножь съ обѣихъ сторонъ на b , и будетъ $ax = cb$, и $x = \frac{cb}{a}$. Когда же $\frac{ax}{b} - c = d$, то будетъ $\frac{ax}{b} = d + c$, и $ax = bd + bc$, слѣд. $x = \frac{bd + bc}{a}$. Пусть будетъ $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, то $\frac{2}{3}x = 5$, $2x = 15$ и $x = \frac{15}{2}$ то есть $7\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, то будетъ $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, $3x = 18$ и $x = 6$.

580.

Статься можетъ, что больше нежели одинъ членъ уравненія содержитъ въ себѣ букву x , и стоятъ на одной или на обѣихъ сторонахъ знака равенства. Если они будутъ на одной сторонѣ, какъ $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, то будетъ $x + \frac{1}{2}x = 6$, $3x = 12$,

$= 12$, и $x=4$. Пусть будетъ $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$. что будетъ x ? Умножь сперва на 3 и выдешъ $4x+\frac{1}{3}x=132$, потомъ умножь еще на 2 и будетъ $11x=264$ слѣд. $x=24$; но сии три числа могутъ вдругъ соединены быть въ одинъ членъ, какъ $\frac{11}{6}x=44$, раздѣли съ обѣихъ сторонъ на 11, и выдешъ $\frac{1}{6}x=4$, и $x=24$.

Положи $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{5}x=1$, что соединивъ въ одинъ членъ дастъ $\frac{5}{12}x=1$, и $x=2\frac{2}{5}$; также когда $ax-bx+cx=d$, то сие будетъ тоже что и $(a-b+c)x=d$, откуда выдешъ $x=\frac{d}{(a-b+c)}$.

581.

Когда же x находится въ обѣихъ частяхъ уравненія, какъ $3x+2=x+10$, то должно x съ одной стороны, гдѣ оно умножено на меньшее число, перенести на другую; чего ради вычти съ обѣихъ сторонъ x , и выдешъ $2x+2=10$, и $2x=8$, слѣд. $x=4$. Пусть будетъ еще $x+4=20-x$, то $2x+4=20$, $2x=16$ и $x=8$.

Положи $x+8=32-3x$, то будетъ $4x+8=32$, и $4x=24$, слѣд. $x=6$.

Также

14 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

Также $15-x=20-2x$, то $15+x=20$, слѣд. $x=5$.

Пусть будетъ $1+x=5-\frac{1}{2}x$, то $1+\frac{3}{2}x=5$; $\frac{3}{2}x=4$, откуда $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

— $-\frac{1}{2}-\frac{1}{7}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x$; придай $\frac{3}{2}x$ выдетъ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{7}{12}x$, вычти $\frac{1}{2}$ будетъ $\frac{7}{12}x=\frac{1}{2}$, умножь на 12 и получится $7x=2$. и $x=\frac{2}{7}$

Также $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}x$, придай $\frac{2}{3}x$, выдетъ $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{15}x$, вычти $\frac{1}{4}$ будетъ $\frac{7}{15}x=1\frac{1}{4}$ умножь на 6 получится $7x=7\frac{1}{2}$, раздѣли на 7, и будетъ $x=1\frac{1}{14}$ или $x=\frac{15}{14}$.

582.

Ежели найдешь такое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное число въ знаменателѣ дроби содержится, то должно тогда сію дробь исключить изъ уравненія умноживъ оное на помянутого знаменателя.

Такъ когда найдется $\frac{100}{x}-8=12$
то придай 8, и выдетъ $\frac{100}{x}=20$,
умножь на x — — $100=20x$,
раздѣли на 20 будетъ $x=5$.
Пусть еще будетъ $\frac{x+3}{x-1}=7$,

умножь

умножь на $x-1$, выйдетъ $5x+3=7x-7$,
 вычти $5x$, будетъ $3=2x-7$,
 придай 7, выйдетъ $10=2x$, и слѣдъ $x=5$.

§ 83.

Иногда въ уравненіи попадаются также и коренные знаки, но уравненіе не смотря на то надлежитъ до первой степени какъ напр. когда ищется число x меньше 100 такое, чѣмъ квадратной корень изъ $100-x$ равенъ былъ 8, или чѣмъ $\sqrt{100-x}=8$, то возьми съ обѣихъ сторонъ квадраты, будетъ $100-x=64$, придай x , выйдетъ $100=64+x$, вычти 64, останется $x=36$, или можно бы было въ семъ случаѣ поступить и такимъ образомъ, когда $100-x=64$, то вычти 100, и останется $-x=-36$, умножь на -1 , произойдетъ $x=36$.

§ 84.

Иногда неизвѣстное число x находится въ показателѣ, какіе примѣры мы уже выше сего видѣли, и въ семъ случаѣ должно

должно прибѣжице имѣть къ логарифмѣмъ.

Такъ когда найдется $2^x = 512$, иго берутся съ обѣихъ сторонѣ логариѣмы, и будетъ $x \cdot \log. 2 = \log. 512$, раздѣли на $\log. 2$ выдешъ $x = \frac{\log. 512}{\log. 2}$, что по таблицамъ найдется такъ:

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{27092700}{3010300} \text{ слѣд. } x=9$$

пусть будетъ $5 \cdot 3^x - 100 = 305$, то придай 100, и будетъ $5 \cdot 3^x = 405$, раздѣли на 5, выдешъ $3^x = 81$, взявъ логарифмы $2x \log. 3 = \log. 81$, раздѣли на $2 \log. 3$ и выдешъ $x = \frac{\log. 81}{2 \log. 3}$ или $x = \frac{\log. 81}{\log. 9}$.

По таблицамъ будетъ $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425}$, по чему $x = 2$.

ГЛАВА III.

О рѣшеніи нѣкоторыхъ принадлежащихъ сюда вопросовъ.

§85.

Вопросъ : раздѣли число 7 на 2 части такъ , чтобъ большая часть была 3 мя больше нежели меньшая.

Пусть будетъ большая часть $= x$, то меньшая $= 7 - x$, и по обстоятельству вопроса должно быть $x = 7 - x + 3$, или $x = 10 - x$, придай x , будетъ $2x = 10$, раздѣли на 2, найдися $x = 5$.

Отвѣтъ: большая часть $= 5$, а меньшая $= 2$.

То же.

Общей вопросъ. Раздѣлить a на двѣ части такъ , чтобъ большая часть превышала меньшую числомъ b ?

Положи большую часть $= x$, то будетъ меньшая $= a - x$; чего ради $x = a - x + b$; придай съ обоихъ сторонъ x , и будетъ $2x = a + b$, раздѣли на 2, получится $x = \frac{a + b}{2}$.

Том: II.

6

То же

То же.

Второе рѣшеніе. Пусть будетъ большая часть $= x$, и когда она меньшую часть превышаетъ числомъ b , то меньшая часть, числомъ b будетъ меньше большей, и по сему меньшая часть $= x - b$, обѣ сѣ части вмѣстѣ должны составить число a , почему $2x - b = a$, придай b , и будетъ $2x = a + b$, раздѣли на 2, выдеиъ $x = \frac{a + b}{2}$ Большая часть, а

меньшая $= \frac{a + b}{2} - b$ или $\frac{a + b}{2} - \frac{2b}{2}$ или $\frac{a - b}{2}$.

586.

Вопросъ. Послѣ отца осталось три сына и 1600 рейхспалеровъ денегъ, а по оставленной имъ духовной старшей сынъ долженъ взять изъ ссй суммы 200 палеровъ больше средняго, средней 100 палеровъ больше нежели меньшей сынъ, спрашивается сколько каждой изъ нихъ возмани?

Положи наслѣдственную часть претъ-яго сына $= x$, то будетъ часть вто-
раго

раго $=x+100$, перваго $=x+300$, и всѣ сии три части сложенныя вмѣстѣ должны дѣлать 1600 талеровъ, чего ради $3x+400=1600$, вычти 400, и будешь $3x=1200$, раздѣли на 3 выдешь $x=400$.

Опечивъ. Третій сынъ возмещъ 400, второй 500, а первой 700 талеровъ.

587.

Вопросъ. По смерти отца осталось 4 сына и 8600 талеровъ, а по завѣщанію покойнаго деньги сии между сыновьями должны быть раздѣлены такъ, чтобъ первой сынъ взялъ въ двое больше нежели второй безъ 100 талеровъ; второй въ три раза больше нежели третьей безъ 200 талер.; третий въ четверо больше нежели четвертой безъ 300 талеровъ, ищется сколько каждой взялъ?

Наслѣдственная часть четвертаго будешь x , третьяго $4x-300$, втораго $12x-1100$, перваго $24x-2300$. и когда сумма всѣхъ сихъ частей должна со-

ставлятъ 8600 талеровъ , то получимъ
мы уравненіе:

$41x - 3700 = 8600$, придай 3700 , и
выдетъ $41x = 12300$, раздѣли на 41, ча-
стное дастъ $x = 300$.

Отвѣтъ. 4 ной сынъ возметъ 300
талер. , 3 тей 900 талер. , 2 рои 2500
талер. , первой 4900 талеровъ.

588.

Вопросъ. Нѣкто по смерти своей
оставилъ 1100 талеровъ , жену , двухъ
сыновей и трехъ дочерей , кои оставше
ся имѣніе должны по силѣ духовной
раздѣлишь такъ , чтобъ жена покойнаго
взяла вдвое больше сына , сынъ въ двое
больше нежели дочь , спрашивается сколь-
ко каждому изъ нихъ доспается ?

Наслѣдственную часть одной дочери
положи $= x$, часть одного сына будетъ $= 2x$,
и часть вдовы $= 4x$; слѣдовательно все
наслѣдство будетъ $3x + 4x + 4x$, или $11x$
 $= 11000$; раздѣли на 11 , выдетъ $x = 1000$.
Отвѣтъ. Одна дочь получитъ 1000 талер.
одинъ

одинъ сынъ — —	2000	— —
а мать возмеиъ —	4000	— —
слѣд. 3 дочери возмунъ	3000	
2 сына —————	4000	
мать —————	4000	
<hr/>		
сумма = 11000 талер.		

589.

Вопросъ. Одинъ отецъ оставилъ по смерти своей трехъ сыновей, которые оставшеся послѣ него имѣнїе должны раздѣлить между собою такъ, чтобъ первой сынъ взялъ 1000 талеровъ, меньше нежели половина всего наслѣдства, второй 800 талеровъ меньше нежели треть всего наслѣдства, третьей 600 талеровъ меньше четвертой доли всего наслѣдства, спрашивается сколь велико было наслѣдство, и сколько каждой сынъ взялъ?

Положи все наслѣдство $= x$
 то первой сынъ взялъ $\frac{1}{2}x - 1000$
 второй ———— $\frac{2}{3}x - 800$
 третьей ————— $\frac{3}{4}x - 600$
б 3 слѣдо-

22 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

Слѣдовательно всѣ три сына взяли $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, которая сумма должна быть равна всему наслѣдству x , и такъ уравненіе будетъ $\frac{13}{12}x - 2400 = x$ вычши x и будетъ $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$ придай 2400 $-\frac{1}{12}x = 2400$ помножь на 12, $x = 28800$.

Опвѣтъ. Всѣ наслѣдство было 28800 рсисхн. изъ чего

первой сынъ взялъ 13400

второй — — — — 8800

третей — — — — 6600

Всѣ три — 28800 талеровъ.

590.

Вопросъ. Оставшіеся по смерти отца 4 сына наслѣдство ихъ между собою дѣлятъ такъ, что первой взялъ 3000 меньше половины всего наслѣдства, другой 1000 меньше нежели $\frac{1}{3}$ наслѣдства, третій точно $\frac{1}{4}$ всего наслѣдства, четвертой 600 талеровъ и еще $\frac{1}{5}$ наслѣдства, спрашивается, сколь велико было наслѣдство, и сколько каждой сынъ взялъ?

Положи

Положи все наслѣдство $= x$

то взявъ первой $\frac{1}{2}x - 3000$

второй $\frac{2}{3}x - 1000$

третьей $\frac{1}{4}x$

четвер. $\frac{1}{5}x + 600$

всѣ 4 вмѣстѣ возмуть $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x$
 $= 3400$, что должно быть $= x$, чего ра-
 ди уравненіе

будетъ $\frac{17}{60}x - 3400 = x$

выпи x и будетъ $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$

придай 3400 $--- \frac{17}{60}x = 3400$

раздѣли на 17 $--- \frac{1}{60}x = 200$

умножь на 60 $--- x = 12000$

Ошвѣтъ. Все наслѣдство было 12000 тал.

изъ коего первой сынъ возмстѣ 3000 тал.

— — — второй — — — 3000

— — — третьей — — — 3000

— — — четвертой — — — 3000

591.

Вопросъ. Найти число, къ которо-
 му ежели придастся его полсвина, сум-
 ма бы столько превышала 60, сколько
 самое число не достаетъ до 65?

64

Пусть

24 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

Пусть будетъ искомое число x , то будетъ

$$x + \frac{1}{2}x - 60 = 65 - x$$

придай, x выйдетъ $\frac{5}{2}x - 60 = 65$

придай 60 — — — $\frac{5}{2}x = 125$

раздѣли на 5 — $\frac{1}{2}x = 25$

умножь на 2 — $x = 50$

Отвѣтъ. Искомое число есть 50.

592.

Вопросъ. Раздѣлить число 32 на двѣ части такъ, что ежели меньшая часть раздѣлится на 6, а большая на 5, сумма бы частныхъ равна была 6?

Пусть меньшая часть будетъ x , то большая $= 32 - x$ меньшая часть раздѣленная на 6, даетъ $\frac{x}{6}$, а большая раздѣленная на 5, въ частномъ дастъ $\frac{32-x}{5}$, чего ради будетъ $\frac{x}{6} + \frac{32-x}{5} = 6$

умножь на 5, выйдетъ $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$

или $-\frac{1}{6}x + 32 = 30$,

придай $\frac{1}{6}x$, будетъ $32 = 30 + \frac{1}{6}x$,

вычти 30 — — — $2 = \frac{1}{6}x$

умножь на 6 — — — $x = 12$.

Отвѣтъ. Меньшая часть будетъ 12, а большая $= 20$.

✓

593.

593.

Вопросъ. Сыскаеть число , которое ежели умножиши на 5 , произведение столькобъ не доспавало до 40 , чѣмъ самое число меньше 12 ?

Положи искомое число x , котораго недоспадокъ до 12 есть $12 - x$, и числа самаго умноженнаго на 5, то есть, $5x$ не доспадокъ до 40 есть $40 - 5x$, что должно быть равно $12 - x$;

чего ради $40 - 5x = 12 - x$,

придай $5x$, то будетъ $40 = 12 + 4x$,

вычти 12 — — — — $28 = 4x$,

раздѣли на 4 — — — — $x = 7$,

Отвѣтъ: искомое число есть 7.

594.

Вопросъ. Число данное 25 раздѣлишь на двѣ части такъ , чтобъ большая часть была въ 49 разъ больше меньшей ?

Пусть будетъ меньшая часть $= x$, то большая $= 25 - x$; и сию большую часть раздѣливъ на меньшую , въ частномъ

65

номѢ должно выйти 49 ; чего ради
 $\frac{25-x}{x} = 49$

Помножь на x и выйдетъ $25 - x = 49x$,

придай $x - - - - 25 = 50x$,

раздѣли на 50 и будетъ $x = \frac{1}{2}$.

Отвѣтъ. Меньшая часть будетъ $= \frac{1}{2}$, а
 большая $= 24\frac{1}{2}$, которую когда раздѣ-
 лишь на $\frac{1}{2}$, то есть, помножишь на 2,
 выйдетъ 49.

595.

Вопросъ. Данное число 48, раз-
 дѣлять на 9 частей такъ, чтобъ ка-
 ждая часть послѣдующая, превышала
 свою предъидущую $\frac{1}{2}$?

Пусть будетъ первая и самая мень-
 шая часть x , то вторая будетъ $x + \frac{1}{2}$,
 третья $x + 1$, 4тая $x + 1\frac{1}{2}$ и такъ да-
 лѣе, понеже части сіи дѣлаютъ про-
 грессію арифметическую, которой первой
 членъ $= x$, разность $\frac{1}{2}$, почему 9той
 членъ будетъ $x + 4$, къ которому при-
 ложивъ первой членъ x и сумму $2x + 4$
 умноживъ на число членовъ 9, произой-
 детъ $18x + 36$ двойная сумма прогрессіи,
 слѣд.

ЛѢд. самая сумма будетъ $9x + 18$, которая должна быть равна 48, по чему $9x + 18 = 48$

вычти 18, и будетъ $9x = 30$,

раздѣли на 9 — — — $x = 3\frac{1}{3}$.

Опвѣтъ. Первая часть будетъ $3\frac{1}{3}$,

а всѣ 9 частей суть такіе $3\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3}$
 $+ 4\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} + 5\frac{2}{3} + 6\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} + 7\frac{1}{3}$, коихъ
 всѣхъ сумма = 48.

596.

Вопросъ. Сыскать арифметическую прогрессию, которой первой членъ = 5, послѣдней = 10, сумма = 60? Здѣсь не дано ни разности ни числа членовъ прогрессіи; но поелику изъ перваго и послѣдняго членовъ можно бы было найти сумму всѣхъ, ежели бы число членовъ извѣстно было, то положи оное = x , сумма прогрессіи будетъ $\frac{x}{2}x = 60$, раздѣли на 15, будетъ $\frac{1}{2}x = 4$ умножь на 2, выйдетъ $x = 8$. Когда число членовъ = 8, то положи разность оныхъ = z , по сему будетъ второй членъ = $5 + z$, третей = $5 + 2z$, осьмой = $5 + 7z$, которой долженъ быть 10,

слѣдо-

Посему $x - 1 = x - 1$, сіе показываетъ намъ, что x совсѣмъ опредѣлить нельзя, но мѣсто его каждое число по изволению брашь можно.

598.

Вопросъ. Нѣкто купилъ нѣсколько локтей сукна давъ за каждые 5 локтей 7 талеровъ, продаетъ опять и беретъ за каждые 7 локтей 11 талеровъ, онъ всего сукна барыша получаетъ 100 талер. Спрашивается сколько было всего сукна?

Положимъ что сукна было x локтей, и сперва смотрѣнь должно, сколько оно въ покупкѣ стоило, что по слѣдующей тройной посылкѣ сыщется:

5 локтей стоятъ 7 талер., что стоятъ x локтей? Отвѣтъ $\frac{7}{5}x$ талера, столько денегъ выдалъ онъ за сукно. Теперь посмотримъ, сколько онъ за него взялъ, по сему тройному правилу 7 локтей стоятъ въ продажѣ 11 талер. что будутъ стоять x локтей? Отвѣтъ.

$\frac{11}{5}x$

$\frac{1}{2}x$ талер.; и сія будетъ взяная за сукно
сумма, коипорая 100 талерами больше
нежели выдапная, чего ради уравненіе
будетъ $\frac{1}{2}x = \frac{7}{8}x + 100$,

вычпи $\frac{7}{8}x$, останется $\frac{1}{8}x = 100$,

умножь на 8, выдетъ $8x = 800$,

раздѣли на 8, будетъ $x = 100$.

Отвѣтъ. Слѣдовательно всего сукна бы-
ло 100 локтя, которые куплены за
816 $\frac{2}{3}$ талера, и потомъ проданы за 916 $\frac{2}{3}$
талера, почему барышь будетъ 100
талеровъ.

599.

Вопросъ. Нѣкто купилъ за 140 та-
леровъ 12 кусковъ сукна, въ семъ числѣ
были 2 куска бѣлые, 3 черные и 7 си-
нихъ; кусокъ чернаго сукна стоилъ 2
талера больше нежели бѣлаго, а синяго
каждой кусокъ стоилъ 3 талера больше
нежели чернаго, спрашивается сколь до-
рого каждое изъ нихъ?

Положи, что кусокъ бѣлаго сукна
стоилъ x , и слѣд. 2 куска бѣлаго сто-
ить будутъ $2x$ талер.

Кусокъ

Кусокъ чернаго стоятъ будетъ $x+2$, слѣдов. 3 куска чернаго стоятъ $3x+6$ талеровъ.

Кусокъ синяго стоитъ $x+5$, слѣд. 7 кусковъ синяго стоятъ $7x+35$ талер.

Всѣ 12 кусковъ стоятъ $12x+41$; въ самомъ же дѣлѣ даны они 140 талер., чего ради получимъ мы

уравненіе $12x+41=140$,
вычлени 41, останется $12x=99$,
раздѣли на 12, будетъ $x=8\frac{1}{4}$.

Отвѣтъ. Кусокъ бѣлаго сукна стоитъ $8\frac{1}{4}$ талер.

чернаго — — — $10\frac{1}{4}$

синяго — — — $13\frac{1}{4}$

600.

Вопросъ. Нѣкто купилъ мушкетныхъ орѣховъ, и говоритъ, что цѣна 3хъ орѣховъ столько же превосходитъ 4 гроша, сколько цѣна 4хъ орѣховъ превышаетъ 10 грошей, спрашивается сколь дороги они были?

Говори когда 3 орѣха стоятъ $x+4$ гроша, то 4 орѣха стоятъ будутъ $x+10$ грошей

грошей ; по тройному жѢ правилу най-
 денся , сколько 4 орѢха по первому по-
 ложенію стоятъ будутъ , т. е. 3 орѢха
 стоятъ $x + 4$ грош. = 4 орѢх. Ответъ.
 $\frac{4x + 16}{3}$, и такъ будетъ , $\frac{4x + 16}{3} = x + 10$
 или $4x + 16 = 3x + 30$,
 вычти, 3х останется $x + 16 = 30$,
 вычти 16 будетъ $x = 14$.
 Ответъ. 3 орѢха стоятъ 18 грошей ,
 а 4 стоятъ 24 гроша ; слѢд. одинъ
 орѢхъ стоитъ 6 грошей.

601.

Вопросъ. НѢкто вмѣстѢ 2 серебре-
 ныхъ стаканъ и одну крышку : первой
 стаканъ вѢситъ 12 лотовъ , но когда
 положится на него крышка , то вѢситъ
 онъ въ двое больше противъ другаго ,
 если же наложится крышка на другой
 стаканъ , то вѢситъ онъ въ трое боль-
 ше противъ перваго, спрашивается сколь-
 ко тяжести крышка и другой стаканъ ?

Положи что крышка вѢситъ x лотовъ,
 то первой стаканъ вмѣстѢ съ крышкой
 станушъ

пянствъ $x+12$ лотовъ , и понеже сей вѣсѣ въ двое больше противъ другаго стакана , то другой стаканъ вѣситъ $\frac{1}{2}x+6$ лотовъ ; и когда наложился на него крышка, то вѣситъ онъ $\frac{1}{2}x+6$ лот., что должно быть 3. 12 лотовъ или 36; откуда получится уравненіе $\frac{1}{2}x+6=36$ или $\frac{1}{2}x=30$, и $\frac{1}{2}x=10$, слѣд. $x=20$
 Отвѣтъ. Крышка вѣситъ 20 лотовъ и другой стаканъ 16.

602.

Вопросъ. Одинъ обмѣнщикъ имѣетъ у себя двухъ сортовъ монеты , перваго сорта на одинъ талеръ идетъ *a* монетъ, а другаго на столько же талеръ идетъ *b* монетъ. Нѣкто желаетъ у него взять на талеръ *c* монетъ, спрашивается сколько обмѣнщикъ долженъ ему дать изъ каждаго сорта ?

Положимъ что перваго сорта даетъ ему обмѣнщикъ *x* монетъ , слѣд. другаго *c-x* , но понеже оныя *x* монетъ равны $\frac{a}{b}$ талер. ибо

$a : 1 = x : \frac{x}{a}$; a $c-x$ монетъ равны $\frac{c-x}{b}$ талер. ибо $b. 1 = c-x : \frac{c-x}{b}$ слѣд. должно быть $\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$, или $\frac{bx}{a} + c-x = b$, или $bx + ac - ax = ab$, потомъ $bx - ax = ab - ac$; слѣдов. $x = \frac{ab - ac}{b-a} = \frac{a(b-c)}{b-a}$;

отсюда будетъ $c-x = \frac{bc - ab + a(b-c)}{b-a} = \frac{bc - ac}{b-a}$

Отвѣтъ. Перваго сорта дастъ обмѣнщикъ на талеръ $\frac{a(b-c)}{b-a}$ монетъ , а другаго $\frac{bc-ac}{b-a}$.

Примѣчаніе. Сии оба числа легко можно найти по тройному правилу ; первое находясь $b-a : b-c = a : \frac{ab-ac}{b-a}$, другое $b-a : c-a = b : \frac{bc-ac}{b-a}$. При семъ примѣчать надлежитъ , что b больше нежели a , и c меньше нежели b , а больше нежели a , какъ самое дѣло требуетъ.

603.

Вопросъ Одинъ обмѣнщикъ имѣетъ у себя два сорта денегъ , перваго сорта идутъ 10 монетъ на талеръ , другаго 20 , а требуетъ у него нѣкто 17 монетъ

нѣтъ на талерѣ , спрашивается сколько получитъ онѣ изъ каждаго сорта ?

Въ семѣ случаѣ $a=10$, $b=20$, $c=17$, откуда выдуть сѣи тройныя правила :

I. $10:3=10:3$, слѣд. перваго сорта возметъ 3; II. $10:7=20:14$, другаго возметъ онѣ 14.

604.

Вопросъ. Нѣкто оставилъ по смерти своей нѣсколько дѣтей и имѣніе, которое дѣти дѣлятъ между собою такъ , что первой изъ нихъ беретъ 100 талер. и еще дѣсятую часть остальнаго имѣнія.

Второй беретъ 200 талер.	} и сверхъ того всегда 10 тую часть остальнаго имѣнія.
третьей - - - 300	
четвертой - - 400	

и такъ далѣе , и по сѣмъ дѣлежѣ находится, что все имѣніе раздѣлено было равно между ими ; спрашивается сколь велико было имѣніе , сколько дѣтей было, и сколько каждой изъ нихъ взялъ ?

Сей вопросъ совсѣмъ особливаго рода , и для того онѣ достоинъ примѣчанія.

36 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

нія. Дабы его удобнѣе разрѣшитьъ можно было, то положи все наслѣдство $= z$ палерамъ; и понеже всѣ дѣти берутъ по ровну, то положи одного чася $= x$, откуда видно что число дѣтей было $\frac{z}{x}$, и посему учредимъ мы рѣшеніе слѣдующимъ образомъ:

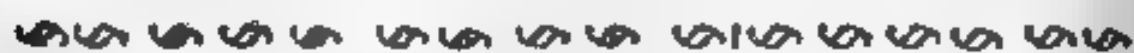
дѣл. деньги дѣти	каждаго чася	разности
z	первой $x = 100 + z - 100$	
$z - x$	второй $x = 200 + z - x - 200$	
$z - 2x$	третьей $x = 300 + z - 2x - 300$	
$z - 3x$	четвер. $x = 400 + z - 3x - 400$	
$z - 4x$	пятой $x = 500 + z - 4x - 500$	$\left. \begin{array}{l} = 100 - x - 100 \\ 10 \end{array} \right\}$
$z - 5x$	шестой. $x = 600 + z - 5x - 600$	
$z - 6x$	седьмой $x = 700 + z - 6x - 700$	
$z - 7x$	осьмой $x = 800 + z - 7x - 800$	

и такъ далѣе

Въ послѣднемъ столбцѣ поставлены разности , которыя происходятъ , когда каждого часть вычтешь изъ наслѣдственной части слѣдующаго ; но понеже всѣ сїи части равны между собою , то каждая изъ сихъ разностей должна быть $= 0$, и когда по щастію нашлось , что всѣ помянутыя разности равны между собою , то довольно одну изъ нихъ положить $= 0$, откуда получимъ мы сїе уравненіе : $100 \frac{-x - 100}{10} = 0$, умножь на 10, и будетъ $1000 - x - 100 = 0$, или $900 - x = 0$ слѣд. $x = 900$.

Отсюда знаемъ уже мы , что каждого наслѣдственная часть $= 900$ талер.; возми теперь одно которое нибудь уравненіе въ 3 емъ столбцѣ , то первое будетъ $900 = 100 + \frac{z - 100}{10}$, изъ котораго z найми надобно ; чего ради помножь его на 10, и будетъ $9000 = 1000 + z - 100$, или $9000 = 900 + z$, слѣд. $z = 8100$ и $\frac{z}{x} = 9$.

Оставѣнъ. Число дѣтей было 9, оставлен-
ное имѣніе 8100 талер. изъ косяго каж-
дой взялъ 900 талеровъ.



ГЛАВА IV.

О разрѣшеніи двухъ или больше уравнений
первой степени.

605.

Часто случается , что 2 или больше
неизвѣстныхъ чиселъ, означенныхъ бук-
вами x, y, z и проч. въ выкладку
входятъ , и тогда по числу неизвѣст-
ныхъ количествъ , въ задачѣ предложен-
ныхъ , столько же пребуется и уравне-
ній , по которымъ каждое неизвѣстное
число опредѣлить должно. Здѣсь ста-
немъ разсмапривать мы только такія
уравненія , въ которыхъ неизвѣстное
число не больше , какъ первой степени
находится ; припомъ гдѣ также ни од-
но ни другое не помножено , такъ что
каждое уравнение имѣть будетъ видъ
 $ax + by + cx = d.$

606.

606.

И шакѢ начнемѢ мы опѢ двухѢ уравненій , изѢ коихѢ два неизвѣстныя числа x и y опредѣлять станемѢ ; и дабы сіе вообще показать , то пусть будутѢ данныя уравненія I) $ax+by=c$ II) $fx+gy=b$,

гдѢ буквы a, b, c , и f, g, b положены мѣсто неизвѣстныхѢ количествѢ , и спрашивается , какимѢ образомѢ изѢ сихѢ двухѢ данныхѢ уравненій опредѣлимѢ неизвѣстныя числа x и y .

607.

Самой легкой кѢ тому способѢ , изѢ каждаго уравненія опредѣлимѢ величину одного неизвѣстнаго числа какѢ напр. x , потомѢ уравнивѢ обѢ сіи величины между собою , получишь одно уравненіе , въ которомѢ одно только неизвѣстное число y находится , которое по вышепоказаннымѢ правиламѢ опредѣлишь можно, а нашедѢ y положи только вмѣсто его самого найденную вели-

чину въ которомъ нибудь изъ данныхъ уравненій, и получишь x .

608.

Въ силу сего правила изъ перваго уравненія найдется $x = \frac{c-by}{a}$, а изъ другаго $x = \frac{b-gy}{f}$, уравнивъ обѣ сіи величины числа x , и получишь $\frac{c-by}{a} = \frac{b-gy}{f}$, умножь на a и будетъ $c-by = \frac{ba-agy}{f}$; умножь на f получится $cf-fby = ba-agy$, придай agy произойдетъ $fc+agy-fby = ab$, вычти fc будетъ $agy-fby = ab-fc$ или $(ag-fb)y = ab-fc$, раздѣли на $ag-fb$, выйдетъ $y = \frac{ab-fc}{ag-fb}$; и ежели сію величину количества положимъ въ одну изъ найденныхъ для x мѣсто y , то получится x .

Возьми первую, и будетъ $-by = \frac{-abb+fb}{ag-fb}$

$$c-by = c - \frac{abb+fb}{ag-fb},$$

или $\frac{acg-fcb-abb+fb}{ag-fb}$, сіе $c-by = \frac{acg-fcb-abb+fb}{ag-fb}$ раз-

дѣли на a , и будетъ $\frac{c-by}{a} = \frac{cg-bb}{ag-fb} = x$.

609.

609.

Что бы изъяснить сіе примѣромъ ,
то пусть будетъ заданъ сей вопросъ :
сыскать два числа, которыхъ сумма $= 15$,
а разность $= 7$?

Положи большее число $= x$, меньшее $= y$,
то будетъ 1) $x + y = 15$, 11) $x - y = 7$.

Изъ перваго уравненія найдется $x = 15$
 $- y$, а изъ другаго $x = 7 + y$, откуда
происходитъ сіе новое уравненіе

$$15 - y = 7 + y,$$

придай y и будетъ $15 = 7 + 2y$

вычти 7 — — — — 8 = 2y

раздѣли на 2, будетъ $y = 4$ и $x = 11$.

Отвѣтъ. Меньшее число $= 4$, а большее $= 11$

610.

Сей вопросъ можно разрѣшить во-
обще, то есть найти два числа, ко-
ихъ сумма $= a$, а разность $= b$?

Пусть будетъ большее число $= x$, а
меньшее $= y$, то будетъ 1) $x + y = a$:
11) $x - y = b$.

В §

Изъ

Изъ перваго уравненія получится $x = a - y$, а изъ другаго $x = b + y$, откуда происходитъ сѣ уравненіе $a - y = b + y$; придай y и будетъ $a = b + 2y$

вычти b , выдешъ $a - b = 2y$

раздѣли на 2, будетъ $y = \frac{a - b}{2}$

и по сему $x = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}$

Отвѣтъ. Слѣдовательно большее число $x = \frac{a + b}{2}$, а меньшее $y = \frac{a - b}{2}$, или $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Отсюда получается слѣдующее правило : большее число равно половинѣ суммы сложенной съ половиною разности ; а меньшее равно разности между половиною суммы и половиною разности.

611.

Сей вопросъ можно еще разрѣшить и такъ : когда оба уравненія суть $x + y = a$ и $x - y = b$, то сложи ихъ вмѣстѣ, и будетъ $2x = a + b$, слѣд. $x = \frac{a + b}{2}$ потомъ вычти изъ перваго уравненія вопро-

рос

рос, получится $2y = a - b$ и $y = \frac{a-b}{2}$ какъ и прежде.

612.

Вопросъ. Лошакъ и оселъ каждой несутъ на хребтѣ своемъ по нѣскольку мѣшковъ, оселъ на свою шаяссть жалуюсь говоритъ къ лошаку, естли бы ты изъ своихъ мѣшковъ далъ мнѣ еще одинъ, тобъ у меня было въ двое больше твоего; на что лошакъ отвѣститъ ему говоря, естли бы ты изъ твоихъ мѣшковъ далъ мнѣ еще одинъ, тобъ было у меня въ трое больше твоего, спрашивается сколько мѣшковъ имѣлъ на себѣ каждой изъ нихъ?

Положимъ что на лошака было x мѣшковъ; а на ослѣ y , и когда лошакъ ослу дастъ одинъ мѣшокъ, то у осла будетъ $y + 1$ мѣшокъ, а у лошака останется $x - 1$, и поелику въ семъ случаѣ на ослѣ будетъ въ двое больше мѣшковъ нежели на лошака, то выйдетъ $y + 1 = 2x - 2$.

Когда же оселъ дастъ лошаку одинъ изъ своихъ мѣшковъ, то у лошака будетъ

44 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

дешъ $x+1$, а у осла $y-1$ мѣшковъ, и поелику лошаки тогда имѣетъ въ прое больше, нежели оселъ, то будетъ $x+1 = 3y-3$.

Слѣдовашельно два уравненія наши будутъ I) $y+1 = 2x-2$; II) $x+1 = 3y-3$, изъ перваго найдется $x = \frac{y+3}{2}$, изъ втораго $x = 3y-4$, откуда произходитъ сіе новое уравненіе

$\frac{y+3}{2} = 3y-4$, которое умноживъ на 2 будетъ $y+3 = 6y-8$

вычпй у получится $5y-8 = 3$

придай 8 выдетъ $5y = 11$

слѣд. $y = \frac{11}{5}$ или $2\frac{1}{5}$, откуда $x = 2\frac{3}{5}$.

Ошвѣстѣ. Лошакъ имѣетъ $2\frac{3}{5}$, а оселъ $2\frac{1}{5}$ мѣшка.

613.

Ежели въ вопросѣ случатся 3 неизвѣстныя количества и столькожъ уравнѣній, какъ напр. I) $x+y+z = 8$, II) $x+z-y = 9$; III) $y+z-x = 10$, то подобнымъ образомъ изъ каждаго уравненія найдется величина x какъ слѣд. I) $x = 8 - y - z$; II) $x = 9 + y - z$; III) $x = y + z - 10$.

Уравнѣ

Уравни сперва первое знаменованіе x со вторымъ , а потомъ съ третьимъ , отчего произойдутъ сіи два уравненія I) $8 + z - y - 9 + y - z$; II) $8 + z - y - y + z - 10$, Изъ перваго будетъ $2z - 2y = 1$, а изъ другаго $2y = 18$, почему $y = 9$; которую величину поставя въ предвѣдущей мѣсто y дастъ $2z - 18 = 1$, $2z = 19$ и слѣд. $z = 9\frac{1}{2}$; отсюда найдется также $x = 8\frac{1}{2}$.

Здѣсь случилось , что въ послѣднемъ уравненіи буква z пропала , и для того можно было легко опредѣлить изъ него букву y . Но ежели бы z въ немъ еще остался, то было бы два уравненія между z и y , которыя бы по прежнимъ правиламъ рѣшить должно было.

614.

Пусть найдено будетъ 3 слѣдующія уравненія : I) $3x + 5y - 4z = 25$; II) $5x - 2y + 3z = 46$; III) $3y + 5z - x = 62$; ищи наѣ каждого величину x , и будетъ I) $x = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$; II) $x = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$; III) $x = 3y + 5z - 62$; сравняй теперь сіи три величин-

46 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

величины между собою , то I и III
дасть $25 - \frac{y+4z}{5} = 3y + 5z - 62$, или помножа

на 5 $25 - y + 4z = 15y + 25z - 310$

придай 186, и будетъ $211 - 5y + 4z = 15y + 25z$

придай $5y$ — — — $211 + 4z = 14y + 25z$,

слѣд. изъ I и III будетъ $211 = 14y + 11z$.

II и III дасть $\frac{46 + 2y - 3z}{5} = 3y + 5z - 62$ или

$46 + 2y - 3z = 15y + 25z - 310$, а изъ сего

найдется $356 = 13y + 28z$.

Изъ каждаго сихъ двухъ уравненій или

величину y . I) $211 = 14y + 11z$, вычли

$11z$ останется

$$141 = 211 - 11z \text{ и } y = \frac{211 - 11z}{14}$$

II) $356 = 13y + 28z$; вычли $28z$, останется

$$13y = 356 - 28z, \text{ и } y = \frac{356 - 28z}{13}$$

Сіи два знаменованія буквы y уравнивъ

между собою дадутъ $\frac{211 - 11z}{14} = \frac{356 - 28z}{13}$

умножь на 13.14 будетъ $2743 - 143z = 4984$
— 392z

придай 392z, будетъ $2743 + 249z = 4984$

вычли 2743 — — $249z = 2241$, и $z = 9$

отсюда найдемъ $y = 8$ и $x = 7$.

615.

Ежели бы въ задачѣ было больше z хъ неизвѣстныхъ чиселъ, и столько же уравнений, то рѣшеніе можно бы учинить подобнымъ прежнему образомъ, но сіе бы ввело насъ въ скучнѣйшіе выкладки.

Однако во всѣхъ сихъ случаяхъ оказываются средства, помощію коихъ сіе рѣшеніе облегчается: сіе дѣлается вводя въ выкладку сверхъ главныхъ неизвѣстныхъ чиселъ еще нѣкоторыя произвольныя, какъ напр. сумму ихъ всѣхъ, что легко усмотрѣть можно пошъ, которой въ такихъ выкладкахъ уже довольно упражнялся; на сей конецъ предложимъ мы нѣсколько примѣровъ.

616.

Вопросъ. Грое играющіе вмѣстѣ, въ первую игру проигралъ первой изъ нихъ обоимъ другимъ, столько сколько каждой изъ нихъ имѣлъ; въ другую игру проигралъ второй первому и третьему, сколько

сколько каждой изъ нихъ имѣетъ , въ претню игру проигралъ прстей первому и второму , столько сколько каждой изъ нихъ имѣлъ , и по окончаніи игры нашлось , что всѣ они по ровному числу имѣютъ , а именно 24 флорена , спрашивается сколько каждой изъ нихъ имѣлъ съ начала ?

Положи что первой имѣлъ x флореновъ , 2 рой y флор. 3 пей z флор. сверхъ сего положи сумму всѣхъ $x+y+z=s$. И когда въ первую игру первой столько проигрываетъ , сколько проигне два имѣютъ , первой же имѣетъ x , то оба другие $s-x$, и такое число теряетъ первой , слѣдовательно останется у него еще $2x-s$, второй имѣтъ будетъ $2y$ а прстей $2z$.

Чего ради по окончаніи первой игры каждаго сумма будетъ I) $2x-s$. II) $2y$; III) $2z$.

Во вторую игру проигрываетъ другой , которой теперь имѣетъ $2y$, сбѣимъ другимъ столько сколько они имѣютъ . но они имѣютъ $s-2y$, слѣд. у другаго

гаго еще останется $4y - z$, другіе же оба будутъ теперь имѣть въ двое больше прежняго, слѣд. по окончаніи другой игры суммы ихъ I) $4x - 2z$; II) $4y - z$; III) $4z$; въ третью игру претей, которой имѣетъ $4z$, проигрываетъ своимъ другимъ, столько, сколько они имѣютъ, то есть $z - 4z$, слѣд. у претяго останется $8z - z$, прочіе же два получаютъ теперь въ двое больше, нежели они имѣли, слѣд. по окончаніи претей игры суммы ихъ будутъ I) $8x - 4z$; II) $8y - 2z$; III) $8z - z$. Поскольку теперь каждой изъ нихъ имѣетъ 24 флорена, то будуще у насъ при уравненіи такого состоянія, что изъ перваго тотчасъ найти можно x , изъ другаго y , а изъ претяго z , особливо когда z также намъ извѣстно, ибо при концѣ игры всѣ вмѣстѣ имѣютъ 72 флорена, что само по себѣ найдется, а выкладка будетъ слѣдующая:

$$\text{I)} \quad 8x - 4z = 24, \text{ или } 8x = 24 + 4z \text{ и } x = 3 + \frac{1}{2}z$$

$$\text{II)} \quad 8y - 2z = 24, \text{ или } 8y = 24 + 2z \text{ и } y = 3 + \frac{1}{4}z$$

$$\text{III)} \quad 8z - z = 24, \text{ или } 8z = 24 + z \text{ и } z = 3 + \frac{1}{7}z;$$

Тол: II.

Г

Слож

50 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ
сложи всѣ сїи величины вмѣстѣ , то по-
лучится $x+y+z=9+7s$,

и понеже $x+y+z=1$, то будетъ $s=9$
 $+7s$, вычти $7s$, останется $s=9$ и $s=72$.
Отвѣтъ. Съ начала игры первой имѣлъ
39 флор. второй 21 флор. третей 12
флор.

Изъ сего рѣшенія видно , что помо-
щю суммы трехъ неизвѣстныхъ чиселъ,
всѣ выше упомянутыя трудности изъ
выкладки вышли.

617.

Сколь ни пруденъ сей вопросъ бытъ
кажется , однакожъ можно его рѣ-
шить и безъ алгебры. Начни только его
съ конца, ибо когда три игрока по окон-
чаніи претей игры равное число денегъ
имѣютъ , то есть 24 флорена каждой ,
припомъ въ третью игру первой и вто-
рой деньги свои удвоили , то предъ прет-
шею игрою имѣли они суммы слѣдую-
щія I) 12 ; II) 12 ; III) 48.

Во вторую игру первой и прешей суммы свои удвоили, слѣдовательно предъ второю игрою имѣли они.

I) 6 ; II) 4^2 , III) 24.

Въ первую игру удвоили свои деньги второй и прешей, слѣд. предъ первою игрою имѣли они

I) 39 ; II) 21 ; III) 12,

столько же какъ и прежде мы нашли.

618.

Вопросъ. Два человека должны 29 талеровъ, у каждого изъ нихъ есть деньги, однако не столько, чтобъ одинъ коимъ ои нибудь могъ заплатить сей долгъ; чего ради первой другому говоритъ, если ты мнѣ дашь $\frac{2}{3}$ твоихъ денегъ, то я въ состояннн буду заплатить одинъ весь долгъ. Другой ему говоритъ, ежели ты мнѣ дашь $\frac{3}{4}$ твоихъ денегъ, то я заплачу одинъ весь долгъ, спрашивается сколько у каждого изъ нихъ было денегъ?

§2 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

Положи что первой имѣлъ x талер. другой y

то въ первыхъ будетъ $x + \frac{2}{3}y = 29$

и въ вторыхъ — — — — — $y + \frac{1}{4}x = 29$;

изъ перваго найдемъ $x = 29 - \frac{2}{3}y$, а изъ втораго $x = \frac{116 - 4y}{1}$.

Изъ обоихъ сихъ изображеній x , выходитъ уравненіе $29 - \frac{2}{3}y = \frac{116 - 4y}{1}$

откуда $y = 14\frac{1}{2}$ и $x = 19\frac{1}{2}$

Отвѣтъ. Первой имѣлъ $19\frac{1}{2}$, другой $14\frac{1}{2}$ талер.

619.

Вопросъ. Трое купили домъ за 100 талеровъ, первой проситъ у другаго $\frac{1}{3}$ его денегъ, и тогда бы онъ могъ одинъ заплатить за весь домъ; другой проситъ у третьяго $\frac{1}{4}$ его денегъ, чтобы ему одному можно было заплатить за весь домъ; третьей проситъ у перваго $\frac{1}{5}$ его денегъ, и тогда онъ въ состояніи будетъ заплатить за весь домъ, спрашивается сколько денегъ у каждаго изъ нихъ было? Положи

положи что первой имѣль x , другой y , а третьей z , то получаются слѣдующія уравненія:

I) $x + \frac{1}{2}y = 100$; II) $y + \frac{1}{3}z = 100$; III) $z + \frac{1}{4}x = 100$
и величина x найдется I) $x = 100 - \frac{1}{2}y$; II)
 $x = 400 - 4z$,

изъ втораго уравненія x опредѣлить нельзя , двѣ же найденныя его величины даюшъ уравненіе

$100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z$, или $4z - \frac{1}{2}y = 300$, которое соединить надлежитъ со вторымъ уравненіемъ , чтобы найти отсюда y и z ; а второе уравненіе было $y + \frac{1}{3}z = 100$, изъ коего $y = 100 - \frac{1}{3}z$, а изъ уравненія $4z - \frac{1}{2}y = 300$ получится $y = 8z - 600$; отсюда выходитъ съ послѣднее уравненіе

$100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600$; слѣд. $8\frac{1}{3}z = 700$, или $\frac{26}{3}z = 700$ и $z = 84$; отсюда получится $y = 100 - 28 = 72$; $x = 64$.

Отвѣтъ. Первой имѣль 64 талер. другой 72 и третьей 84 талера.

Понеже въ семъ примѣрѣ въ каждомъ уравненіи больше двухъ неизвѣстныхъ чиселъ не находится, то рѣшеніе его способѣе можетъ учиниться такъ:

Ищи изъ перваго уравненія $y = 200 - 2x$, которой чрезъ x опредѣлится, и сію найденную величину поставь во второмъ уравненіи мѣсто y ; и будетъ $200 - 2x + \frac{1}{2}z = 100$, вычти 100, останется $100 - 2x + \frac{1}{2}z = 0$, или $\frac{1}{2}z = 2x - 100$; и $z = 6x - 300$, слѣд. и z опредѣленъ также чрезъ x ; сію величину поставь въ третьемъ уравненіи мѣсто z , и будетъ $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, гдѣ одни только x содержатся, умножь на 4

и будетъ $25x - 1600 = 0$; слѣд. $x = 64$

$$y = 200 - 128 = 72$$

$$z = 384 - 300 = 84.$$

Равнымъ образомъ поступать надлежитъ и въ иѣхъ случаяхъ, когда такихъ уравненій много будетъ.

Такъ

Такъ вообще

I) $u + \frac{x}{a} = n$, II) $x + \frac{y}{b} = n$; III) $y + \frac{z}{c} = n$; IV) $z + \frac{u}{d} = n$ или исключивъ дроби

I) $au + x = an$; II) $bx + y = bn$; III) $cy + z = cn$; IV) $dz + u = dn$. Въ ссѣмъ случаѣ изъ первой будетъ $x = an - au$, что поставя мѣсто x во второмъ уравненіи получится $aen - abu + y = bn$, слѣд. $y = bn - aen + abu$; сіе поставивъ мѣсто y въ третьемъ уравненіи будетъ $cen - abcn + abc + z = cn$, слѣд. $z = cn - bcn + abcn - abc + u$, наконецъ положивъ въ четвертомъ уравненіи сію для z означенную величину, произойдетъ

$cdn - bcdn + abcdn - abcd + u = dn$, слѣд. будетъ $dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcd + u$, или

$(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$

$$\begin{aligned} u &= \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} \\ &= \frac{n(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1} \end{aligned}$$

Отсюда найдутся уже прочіе величины такъ :

Г 4

$x = a$

§6 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \frac{abcd - acd + ad - a}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{a'cdn - abdn + abn - bn}{a'cd - 1} = n' \frac{abcd - abd + ab - b}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n' \frac{abcd - abc + bc - c}{a'cd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cnd - dn}{abcd - 1} = n \frac{abcd - bcd + cd - d}{abcd - 1}$$

622.

Вопросъ. Одинъ капитанъ имѣетъ 3 роты салдатъ ; первая состоитъ изъ Швейцаровъ , другая изъ П'вабовъ , а третья изъ Саксонцовъ ; съ ними намѣренъ онъ осадить городъ , и въ награжденіе за то обѣщаетъ имъ дать 9000 талеръ , которые онъ между ими такъ раздѣлитъ намѣренъ :

Каждой салдатъ изъ той роты , которая осаду начнетъ , получитъ 1 талеръ , а остальные деньги раздѣлитъ между прочими поровну. Но въ сѣмъ случаѣ нашлось , что если бы Швейцарцы осаду начали, тобъ каждой изъ
обѣихъ

обѣихъ другихъ ротъ получилъ $\frac{1}{2}$ талера. Когда же бы осаду начали Швабы, то обѣ каждой изъ прочихъ получилъ $\frac{1}{3}$ талера; и наконецъ если бы Саксонцыю ной штурмъ начали, то обѣ каждой салдаты изъ прочихъ двухъ ротъ получилъ $\frac{1}{4}$ талера, спрашивается сколько было салдатъ въ каждой ротѣ?

Положи что число Швейцаровъ было x , Швабовъ y , а Саксонцевъ z

Потомъ положи сумму всѣхъ $x + y + z = f$, ибо напередъ видѣть можно, что сею суммою выкладка облегчится. Когда осаду начнутъ дѣлать Швейцары, коихъ число x , то число обѣихъ остальныхъ $= f - x$, и когда каждой изъ первыхъ возмемъ $\frac{1}{2}$ талеръ, сн на противъ того $\frac{1}{2}$ талер., то будетъ $x + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}x = 901$, или $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f = 901$.

Равнымъ образомъ, когда осаду начнутъ Швабы, то будетъ $y + \frac{1}{3}f - \frac{1}{3}y = 901$, или $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}f = 901$; когда же осаждаютъ спанутъ Саксонцы, то будетъ

$x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 901$; или $2x + y - \frac{2}{3}z = 1802$,
изъ сихъ трехъ уравненій каждую букву
 x, y, z , опредѣлить можно.

ибо изъ перваго получится $x = 1802 - y + \frac{2}{3}z$

изъ втораго — — — — $2y = 2703 - 2x + \frac{2}{3}z$

изъ третьяго — — — — $3z = 3604 - 3x + y$,

напиши ихъ теперь другъ подъ другомъ, съ-
скавъ напередъ величины $6x, 6y, 6z$

$$\text{такъ } 6x = 10812 - 6y + 4z$$

$$6y = 8109 - 4x + 2z$$

$$6z = 7208 - 3x + y$$

сложи вмѣстѣ будетъ $6s = 26129 - 11s$,
или $17s = 26129$, откуда $s = 1537$, что
показываетъ сумму всѣхъ людей въ 3хъ
родахъ находящихся.

Отсюда найдутся

$$x = 1802 - 1537 = 265$$

$$2y = 2703 - 1537 = 1166 \text{ и } y = 583$$

$$3z = 3604 - 1537 = 2067 \text{ и } z = 689.$$

Означъ. Въ родѣ Швейцаровъ было 265

чел.

человѣкъ, въ ропѣ Швабовъ 583, а въ ропѣ Саксонцовъ было 689 человекѣ.



ГЛАВА V.

О рѣшеніи чистыхъ квадратныхъ уравненій,

623.

Квадратное уравненіе называется, въ которомъ квадратъ или вторая степень неизвѣстнаго количества находится, и сверхъ того никакой вышшей степени нѣтъ; ибо если бы въ томъ же уравненіи находилась и третья степень неизвѣстнаго числа, то бы оно уже принадлежало къ кубическому уравненію, котораго рѣшеніе особливыхъ правилъ требуетъ.

624.

Въ квадратномъ уравненіи при вещи примѣчанъ надлежитъ: во первыхъ такіе члены, въ которыхъ неизвѣстнаго числа нѣтъ, или которые изъ извѣстныхъ только количествъ состоятъ.

Во

60 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

Во вторыхъ пѣ члены , въ которыхъ неизвѣстное число первой степени находится,

и въ третьихъ гѣ члены , въ которыхъ содержащія квадраты неизвѣстнаго количества.

Такъ когда x означаетъ неизвѣстное число , а буквы a, b, c, d представляющія извѣстныя , то члены первого рода имѣющія форму a , второго рода bx , и третьего рода члены имѣющія форму xx .

625.

Выше сего показано было , что два или больше члена одного рода могутъ соединены быть въ одинъ , или почтеться за одинъ членъ ; такъ формула $axx - bxx + cxx$ можетъ почтена быть за одинъ членъ , и представляется $(a - b + c)xx$, потому что $a - b + c$ въ самомъ дѣлѣ извѣстное число означаетъ.

Когда такіе члены находятся будутъ по обѣимъ сторонамъ знака $=$, то видѣли мы какъ они на одну сторону

ну переносятся и въ одинъ членъ соединяются.

Такъ когда случится уравненіе $2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11$,

то вычти сперва $2xx$, и получится $-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$,

придай $8x$, и будешь $5x + 4 = 3xx + 11$,
вычти 11 останется $3xx = 5x - 7$

626.

Можно также всѣ члены перенести на одну сторону знака $=$, такъ что на другой сторонѣ останется 0; при чемъ примѣчать надлежитъ, что когда члены съ одной стороны знака $=$, на другую переносятся, то знаки ихъ переменять надлежитъ.

Такъ прежнее уравненіе получитъ такой видъ $3xx - 5x + 7 = 0$; вообще каждое квадратное уравненіе въ сей формулѣ заключаться будетъ какъ: $axx + bx + c = 0$, гдѣ знакъ $+$ плюсъ и минусъ извѣщаются, дабы чрезъ то показать, что

что сіи члены могутъ быть иногда положительные , а иногда отрицательные.

627.

Какой бы видъ съ начала ни имѣло квадратное уравненіе, то всегда можно его привести въ формулу , которая имѣетъ только 3 члена; такъ когда бы кто съ начала дошелъ до сего уравненія , какъ $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$, то прежде всего надлежитъ изъ него исключить дробь, и для того умножь на $cx+d$ и получится $ax+b = \frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, по сему умножь еще на $gx+h$ и будетъ

$$agxx + bgx + ah + bh = cexx + cfx + edx + fd.$$

Сіе есть квадратное уравненіе и можетъ быть приведено въ слѣдующіе три члена, ежели они всѣ перенесутся на одну сторону и напишутся другъ подъ другомъ такъ :

$$\begin{aligned} 0 = agxx + bgx + bh \\ - cexx + ahx - fd \\ - cfx \\ - ehx \end{aligned}$$

или что бы еще яснее представить, то напиши $0 = (ag - ce)xx + (bg + ab - cf - cd)x + bb - fd$.

628

Такое квадратное уравненіе, въ которомъ всѣхъ трехъ родовъ члены находятся, называется полное квадратное уравненіе, и рѣшеніе его большимъ трудностямъ подвержено; для сей причины станемъ мы сперва разсматривать такія уравненія, въ коихъ одного изъ сихъ трехъ членовъ не достаетъ. Правда ежели въ уравненіи не будетъ члена xx , то его не можно причесть къ квадратному уравненію, но къ уравненіямъ перваго рода, или ежели бы не было въ немъ члена изъ извѣстныхъ количествъ состоящаго, то оно было бы $axx + bx = 0$, которое раздѣливъ на x выдетъ $ax + b = 0$, которое опять принадлежа къ роду простыхъ уравненій.

629.

Но когда въ уравненіи не достаетъ средняго члена, содержащаго первую

спс-

64 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

степень x , то оно имѣетъ видъ $axx \pm c = 0$ или $axx = c$, какой бы знакъ при c ни былъ $+$ или $-$, такое уравненіе называется чистое квадратное уравненіе, для того что рѣшеніе его никакой трудности не имѣетъ; ибо раздѣли его только на a , то получится $xx = \frac{c}{a}$, и взявъ съ обѣихъ сторонъ квадратные корни будетъ $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$, чрезъ что уравненіе разрѣшится.

630.

Здѣсь надлежитъ разсмотрѣть три случая:

1. Когда $\frac{c}{a}$ будетъ квадратное число, коего корень дѣйствительно извѣститъ можно, и величина x опредѣлится тогда раціональнымъ числомъ, какое бы оно ни было, цѣлое или ломаное. Такъ изъ уравненія $xx = 144$ получится $x = 12$, а изъ $xx = \frac{9}{4}$ будетъ $x = \frac{3}{2}$.

2. Если $\frac{b}{a}$ будетъ не квадратное число то тогда довольствоваться должно кореннымъ закономъ V.

Такъ когда $ax=12$, то будетъ $x=\sqrt{12}$, коего величину можно опредѣлить приближеніемъ, какъ уже выше сего показано было.

3. Если $\frac{c}{a}$ будетъ отрицательное число, то величина x будетъ совсѣмъ невозможная или мнимая, и показываетъ, что вопросъ, приведшій насъ къ сему уравненію, самъ по себѣ не возможенъ,

631.

Прежде нежели мы далѣе пойдемъ надлежитъ примѣтить, что какъ скоро изъ какого нибудь числа квадратной корень извѣстать должно будетъ, то всегда имѣетъ оной двойное знаменованіе, то есть, какъ положительное, такъ и отрицательное, какъ уже прежде упомянуто было.

Толѣ II.

А

Такъ

Такъ ежели дойдемъ до уравненія $x^2 = 49$, то величина x будетъ не только $+7$, но также и -7 ; и для того она всегда означается $x = \pm 7$, откуда явствуетъ, что всѣ сіи вопросы имѣютъ двоякое рѣшеніе; но во многихъ случаяхъ, гдѣ напр. спрашивается о нѣкомъ числѣ людей, отрицательная величина мѣста уже не имѣетъ.

632.

Равнымъ образомъ и въ прежнемъ случаѣ, гдѣ только не достаетъ однихъ извѣстныхъ чиселъ, какъ $ax^2 = bx$, x всегда двоякое имѣетъ знаменованіе, не смотря на то что одно только останется, ежели уравненіе на x раздѣлится. Ибо ежели будетъ уравненіе $ax = 3x$, гдѣ такое x сыскать надлежитъ, чтобъ ax равенъ былъ $3x$; то учинится сіе положивъ $x = 3$, которая величина выйдетъ ежели данное уравненіе раздѣлится на x . Но сверхъ сего вопросъ рѣшится также, когда положишь $x = 0$, ибо тогда будетъ $ax = 0$ и $3x = 0$. Вообще

ще при всѣхъ квадратныхъ уравненіяхъ примѣчать надлежитъ, что они всегда имѣютъ два рѣшенія, напротивъ того простыя не больше одного.

Изъяснимъ теперь сіи чистыя квадратныя уравненія нѣсколькими примѣрами.

633.

Вопросъ. Сыскать такое число, котораго половина умноженная на $\frac{1}{3}$ сего самаго, въ произведеніи дася 24?

Пусть будетъ сіе число $= x$. по произведеніе $\frac{1}{2}x$ на $\frac{1}{3}x$ должно дать 24; слѣдовательно будетъ $\frac{1}{6}xx = 24$.

Умножь на 6 выдетъ $xx = 144$, и извлеки квадратной корень получится $x = \pm 12$; ибо ежели $x = \pm 12$, то $\frac{1}{2}x = 6$ и $\frac{1}{3}x = 4$, коихъ произведеніе $= 24$. равнымъ образомъ когда $x = -12$, то $\frac{1}{2}x = -6$ и $\frac{1}{3}x = -4$, сихъ чиселъ произведеніе будетъ также ± 24 .

634.

Вопросъ. Ищется число , къ которому еспли приложится 5 и то же число изъ него вычтется, то сумма первая умноженная на сию разность произведетъ 96.

Пусть будетъ оное число $=x$, то $x+5$ умноженное на $x-5$ въ произведеніи должно дать 96, по чему уравненіе будетъ $x^2-25=96$.

Придай 25, то будетъ $x^2=121$, извласки квадрапн. корень, выдетъ $x=11$, ибо $x+5=16$, и $x-5=6$ и $6.16=96$.

635.

Вопросъ. Сыскашь число , которое когда приласия къ 10, и попомъ изъ 10 вычтется , сумма бы умноженная на разность произвела число 51?

Искомое число положи $=x$, то $10+x$ на $10-x$ умноженное должно въ произведеніи дать 51; по чему уравненіе будетъ $100-xx=51$, придай xx и вычпи

чти 51, то выйдетъ $xx = 49$, и извлечши квадратной корень найдется $x = 7$.

636.

Вопросъ. Трое имѣютъ у себя деньги, сколько разъ первой имѣетъ 7 талеровъ, столько разъ имѣетъ другой 3 талера, и сколько разъ другой имѣетъ 17 талеровъ, столько разъ третей 5 талеровъ; а когда я сумму денегъ первого, на сумму второго, сумму денегъ второго на сумму третьего, и наконецъ сумму денегъ и третяго на сумму первого помножу, и потомъ всѣ сіи три произведенія сложу въ одну сумму, въ суммѣ выйдетъ 3830², спрашивается сколько у каждого изъ нихъ денегъ было?

Положи, что у первого было x талеровъ, и когда сказано, что сколько разъ первой имѣетъ 7 талеровъ, столько разъ другой 3 талера, то сіе значить тоже, что деньги первого къ деньгамъ второго содержатся какъ 7:3, и такъ положи $7:3 = x$ къ деньгамъ другого $\frac{3x}{7}$;

А 3

потомъ

70 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

потомъ деньги втораго къ деньгамъ
третьяго какъ 17:5, что будетъ $17 \cdot 5$
 $= \frac{8x}{7}$ къ деньгамъ третьяго $\frac{15x}{119}$.

Теперь умножь деньги перваго x , на
сумму денегъ втораго $\frac{8x}{7}$, въ произведе-
нїи будетъ $\frac{8xx}{7}$. Потомъ деньги втораго
 $\frac{8x}{7}$ умножь на деньги третьяго $\frac{15x}{119}$ въ
произведенїи $\frac{15xx}{833}$, наконецъ деньги треть-
яго $\frac{15x}{119}$ умножь на деньги перваго x вы-
детъ $\frac{15xx}{119}$. Сии при произведенїи $\frac{8xx}{7}$
 $+\frac{15xx}{833}+\frac{15xx}{119}$ приведенные къ одному
знаменателю, дадутъ $\frac{507}{833}xx$, что должно
быть равно числу 3830 $\frac{1}{2}$.

Чего ради положивъ $\frac{507}{833}xx = 3830\frac{1}{2}$,
умножь на 3 и выдетъ $\frac{1521}{833}xx = 11492$,
умножь еще на 833 $1521xx = 9572836$,
раздѣли на 1521, выдетъ $xx = \frac{9572836}{1521}$,
издеки квадратной корень и будетъ $x = \frac{3084}{39}$,
гдѣ раздѣливъ числителя и знаменателя
на 13, выдетъ $x = \frac{278}{3}$ или $x = 79\frac{1}{3}$, и слѣд.
 $\frac{8}{7}x = 34$, а $\frac{15}{119}x = 10$.

Отвѣтъ.

Отвѣтъ первой имѣетъ $79\frac{1}{3}$ талера ,
второй 34 , третьей 10 талеровъ.

Примѣчаніе. Сію выкладку можно здѣ-
лать еще легче , разрѣшивъ находящіяся
въ оной числа на ихъ множители , и
замѣтивъ особенно ихъ квадраты. Такъ
 $507 = 3.169$, гдѣ 169 есть квадратъ 13 ;
потомъ $833 = 7.119$, а $119 = 7.17$ слѣд.
 $833 = 49.17$. Но найдено $\frac{3.169}{49.17}xx = 3830\frac{2}{3}$,
то умножь на 3 и выдѣли $\frac{9.69}{49.17}xx = 11492$;
сіе число разрѣши на множители , изъ
коихъ первой 4 тотчасъ найдется , такъ
что $11492 = 4.2873$, число 2873 можно
раздѣлить еще на 17 и будетъ 2873
 $= 17.169$; по чему уравненіе наше полу-
читъ видъ $\frac{9.69}{17.49}xx = 4.17.169$, которое
раздѣливъ на 169 выдѣли $\frac{9}{17.49}xx = 4.17$, и
потомъ умноживъ на 17.49 и раздѣливъ
на 9 выдѣли $xx = \frac{4.230.49}{9}$, гдѣ всѣ мно-
жители суть квадратныя числа , и корень
ихъ буди $x = \frac{2.17.7}{3} = \frac{238}{3}$, то же что и
прежде.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ вмѣстѣ наняли фактора и послали его въ Андорфъ торговать, къ чему каждой положилъ въ 10 разъ больше талеровъ, нежели сколько ихъ въ компаніи было; такимъ образомъ отправленной факторъ получилъ барыша на 100 талеровъ въ двое больше числа людей компанію со-спавляющихъ; ежели же $\frac{1}{100}$ всего выигрыша умножишь на $2\frac{2}{3}$, то въ произведеніи выдѣлится число купцовъ, спрашивается сколько ихъ всѣхъ было?

Положи число купцовъ было $= x$, и когда каждой положилъ въ компанію $10x$, то весь капиталъ былъ $10xx$ талеровъ. Факторъ выигрываетъ на 100 талеровъ $2x$ талера, слѣдовательно на весь капиталъ $10xx$ выигралъ онъ $\frac{1}{5}x^2$, и сотая часть сего выигрыша, то есть $\frac{1}{500}x^2$ умноженная на $2\frac{2}{3}$, то есть на $\frac{20}{9}$ въ произведеніи дастъ $\frac{20}{4500}x^2$ или $\frac{1}{225}x^2$ число равное числу купцовъ x .

И

И такъ уравненіе будетъ $\frac{1}{225}x^3 = x$ или $x^3 = 225x$, что кажется бышь кубическое уравненіе ; но послѣду его раздѣлить можно на x , то выйдетъ изъ него сіе квадратное $xx = 225$ и $x = 15$.

Отвѣтъ. Число всѣхъ купцовъ было 15 и каждой положилъ 150 талеровъ.



ГЛАВА VI.

О рѣшеніи смѣшенныхъ квадратныхъ уравненій.

638.

Смѣшенное квадратное уравненіе называется , въ которомъ находятся члены трехъ родовъ : первое такіе , которые содержатъ въ себѣ квадратъ неизвѣстнаго количества , какъ axx : второе , такіе въ которыхъ неизвѣстное первой степени находится , какъ bx : и на послѣдокъ такіе , кои составлены изъ извѣстныхъ чиселъ. Если два или больше члена одного роду соединятся въ одинъ ,

74 СБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

и перенесутся на одну сторону знака $=$,
то форма такого уравненія будетъ $ax^2 + bx + c = 0$

Какимъ образомъ изъ такихъ уравне-
ній величина x находится, въ сей главѣ
изъяснено быть должно, и къ чему имѣ-
емъ мы два способа.

639.

Такое уравненіе помощію дѣленія
можно разпорядить такъ, что первой
его членъ состоятъ будетъ только изъ
квадрата неизвѣстнаго количества ax ,
второй членъ оставъ на той же сторо-
нѣ, гдѣ и ax , а извѣстное число перене-
си на другую сторону, общего фор-
мула наша переимѣнится въ сію $ax + px = +q$, гдѣ p и q означающъ извѣстныя
какъ положительныя, такъ и отрица-
тельныя числа. Теперь дѣло состоятъ
въ томъ, чтобъ сыскать величину x ;
здесь прежде всего примѣчать надлежитъ,
что если бы $ax + px$ былъ точной
квадратъ, то и рѣшеніе бы не имѣло

ни малой трудности, ибо тогдабъ ничего больше не требовалось, какъ только съ обѣихъ сторонъ взявъ квадратные корни.

640.

Но видно что $xx + px$ не точной квадратъ ; ибо прежде сего видѣли мы , что ежели корень состоитъ изъ двухъ членовъ , какъ $x + n$, то квадратъ его будетъ имѣть 3 части, то есть сверхъ квадратовъ каждой части еще двойное произведеніе обѣихъ частей , такъ что квадратъ изъ $x + n$ будетъ $xx + 2nx + nn$; когда же мы на одной сторонѣ имѣемъ $xx + px$, то xx почтется можетъ какъ квадратъ первой части корня , а px двойное произведеніе первой части x на вторую , слѣдов. другая часть должна быть $\frac{1}{2}p$, какъ и въ самомъ дѣлѣ квадратъ изъ $x + \frac{1}{2}p$ находящся $xx + px + \frac{1}{4}p^2$.

641.

Послику $xx + px + \frac{1}{4}p^2$ есть дѣйствительной квадратъ , коего корень $x + \frac{1}{2}p$, то въ нашемъ уравненіи $xx + px = q$ прибавимъ

бавимъ мы только съ обѣихъ сторонъ $\frac{1}{4}rr$, и получится $xx+rx+\frac{1}{4}rr=\frac{1}{4}rr+q$, гдѣ на одной сторонѣ стоитъ дѣйствительной квадратъ, а на другой только извѣстные числа: и такъ ежели мы съ обѣихъ сторонъ возьмемъ квадратные корни, то получится $x+\frac{1}{2}r=\sqrt{\frac{1}{4}rr+q}$, вычти теперь $\frac{1}{2}r$, и будетъ $x=-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+q}$; а поелику каждой квадратной корень можетъ быть какъ положительной, такъ и отрицательной, того ради для x найдется двѣ величины содержащіяся въ формулѣ $x=-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}rr+q}$.

642.

Въ сей формулѣ содержится правило, по которому всѣ квадратныя уравненія рѣшаются, и что бы не всегда нужно было повторять прежнее дѣйствіе, то довольно одно только содержаніе сей формулы имѣть въ памяти; а уравненіе можно разпорядить такъ, что на одной его сторонѣ находится будетъ только xx , чего ради прежнее уравненіе будетъ имѣть

имѣть такой видъ $xx = -px + q$, изъ коего величина x означится такъ $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q}$.

643.

Отсюда выводится общее правило для разрѣшенія уравненія $xx = -px + q$.

А именно, здѣсь видно что не извѣстное число x равно будетъ половинѣ числа, которымъ x помножено на другой сторонѣ и сверхъ того еще $+$ или $-$ квадратной корень изъ квадрата числа теперь объявленнаго, и изъ простаго числа притомъ членъ уравненія составляющаго.

Такъ когдабъ случилось уравненіе $xx = 6x + 7$ тобъ было $x = 3 \pm \sqrt{(3)^2 + 7} = 3 \pm 4$, слѣд. обѣ величины x будутъ I) $x = 7$; II) $x = -1$.

А когда уравненіе будетъ $xx = 10x - 9$, то $x = 5 \pm \sqrt{(5)^2 - 9} = 5 \pm 4$, и два знаменованія x суть $x = 9$ и $x = 1$.

644.

Къ лучшему уразумѣнію сего правила можно различать слѣдующіе случаи: I) когда p будетъ четное число II) когда p не четное; III) когда p ломанное число.

Пусть будетъ I) p четное число, и уравненіе: такое $xx = 2px + q$, то будетъ $x = p \pm \sqrt{pp + q}$. II) ежели p не четное число и уравненіе такое $xx = px + q$, откуда $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$ и когда $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp + 4q}{4}$, и изъ знаменателя 4 можно извлечь корень квадратной, то будетъ:

$$x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{pp + 4q}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{pp + 4q}}{2},$$

645.

Ежели же III) p будетъ дробь, то рѣшеніе учинится такъ: пусть будетъ квадратное уравненіе $axx = bx + c$, или $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, то по объявленному правилу $x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{bb + 4ac}}{2a}$ или $x = \frac{b \pm \sqrt{bb + 4ac}}{2a}$ или $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)}$. ибо когда $\frac{bb}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{bb + 4ac}{4a^2}$

и знаменатель квадратное число , то x

$$= \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}.$$

бѣб.

Другой путь, которой насъ ведетъ къ сему же рѣшенію, состоитъ въ томъ, что бы такое смѣшенное квадратное уравненіе какъ $xx = px + q$, преобразить въ другое чистое; что здѣлается въводя въ выкладку мѣсто неизвѣстнаго числа x другое y , такъ что $x = y + \frac{1}{2}p$; ибо когда найдешь y , то изъ него получишь и величина x .

Такъ если $y + \frac{1}{2}p$ поставишь мѣсто x , то будетъ $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ и $px = py + \frac{1}{4}pp$ и по сему уравненіе будетъ $xy + py + \frac{1}{4}pp = py + \frac{1}{4}pp + q$, вычти здѣсь сперва py , и будетъ $xy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q$, вычти еще $\frac{1}{4}pp$, останется $xy = \frac{1}{4}pp + q$, и сіе есть чистое уравненіе, откуда $y = \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$.

Но понеже $x = y + \frac{1}{2}p$, то $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$; что уже и прежде найдено было. И такъ здѣсь болѣе ничего не остается

остается , какъ только сіе правило изъяснить примѣрами.

647.

Вопросъ. Найти два числа , изъ коихъ одно другое превышаетъ 6 тью , произведеніе же ихъ равно 91 ?

Пусть будетъ меншее число x , то большее

$x+6$, и произведеніе ихъ $xx+6x=91$,
вычти $6x$, и выдетъ $xx=-6x+91$,

и по правилу показанному $x=-3 \pm \sqrt{(9+91)}$ $=-3 \pm 10$; слѣд. $x=7$, или $x=-13$.

Отвѣтъ. Сей вопросъ имѣетъ два рѣшенія , по первому находится меншее число $x=7$, а большее $x+6=13$. По второму меншее число $x=-13$, а большее $x+6=-7$.

648.

Вопросъ. Найти число , изъ квадрата коего ежели вычту 9, остатокъ шѣмъ же бы превышалъ 100, чѣмъ искомос число не доспастъ до 23 ?

Искомос

Искомое число пусть будетъ x , то $xx - 9$ превышаетъ 100 числомъ $xx - 109$, и искомое число до 23 не достигаетъ числомъ $23 - x$, откуда происходитъ уравненіе $xx - 109 = 23 - x$

придай 109, будетъ $xx = -x + 132$, и по правилу данному $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 132}$
 $= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{529}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{23}{2}$ слѣд. $x = 11$ или $x = -12$.

Отвѣтъ. Если требуется отвѣтъ положительной, то искомое число $= 11$, коего квадратъ умноженной 9 тью даетъ 112, что превышаетъ 100 12 тью, и найденное число 11 столько же не достигаетъ до 23.

649.

Вопросъ. Найми число, котораго ежели $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ между собою умножатся, и къ произведенію придася $\frac{1}{2}$ искомага числа, то въ вышло 30?

Пусть будетъ сіе число x , то $\frac{1}{2}$ умноженная на $\frac{1}{3}$ его дастъ $\frac{1}{6}xx$, къ чему
 Толь II. Е прило-

приложивъ $\frac{1}{2}x$ получимъ $\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$,
что должно быть $= 30$,

умножь на 6 , получится $xx + 3x = 180$
или $xx = -3x + 180$, откуда найдемъ

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 180\right)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$$

слѣд. $x = 12$, или $x = -15$

650.

Вопросъ. Найти два числа , въ укрѣпленной пропорціи , коихъ сумму ежели сложишь съ ихъ произведеніемъ , тобъ вышло 90 ?

Искомое число положа x , большее будетъ $2x$, произведеніе ихъ $2xx$, къ сему приложи сумму $3x$, выйдетъ 90.

Слѣдовательно $2xx + 3x = 90$, вычти $3x$, останется $2xx = -3x + 90$, раздѣли на 2 , будетъ $xx = -\frac{3}{2}x + 45$,

откуда $x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{16} + 45\right)} = -\frac{3}{4} \pm \frac{27}{4}$,
По сему x будетъ или 6 , или $-7\frac{1}{2}$.

651.

Вопросъ. Нѣкто купилъ лошадь за не извѣстное число талеровъ , а прода-
стѣ

стѣ се опять за 119 талеровѣ, при чемѣ получаетѣ на 100 талеровѣ столько выигрыша, чего вся лошадь стоила, спрашивается, сколько онѣ за нее далѣ?

Положи что лошадь ему стоила x талер., и понеже онѣ на нее выигралѣ x процентов, то положи что на 100 талеровѣ выигрываетѣ онѣ x , сколько на x барыша получится? Отвѣтъ $\frac{xx}{100}$; и когда онѣ барыша получилѣ $\frac{xx}{100}$, а заплатилѣ самѣ x талер., то долженѣ онѣ взять за нее $x + \frac{xx}{100}$, и по тому будетѣ $x + \frac{xx}{100} = 119$,

вычти x , и будетѣ $\frac{xx}{100} = -x + 119$,

умножь на 100, получится, $xx = -100x + 11900$,

откуда $x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50 \pm \sqrt{14400} = -50 \pm 120$.

Отвѣтъ. Лошадь стоила ему 70 талеровѣ, и поелику онѣ выигралѣ на оныя 70 процентов, слѣд. барышъ его будетѣ 49 талеровѣ. По чему долженѣ онѣ ее продать за $70 + 49$, что есть за 119 талеровѣ.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ себѣ нѣсколько суконъ, одно за 2 шалера, другое за 4 шалеръ преемѣ за 6 шалеръ, увеличивая всегда двумя шалерами цѣну каждаго слѣдующаго сукна, а за всѣ сукна заплатилъ онъ 110 шалеровъ, спрашивается сколько всѣхъ суконъ было?

Пусть число суконъ было x , и сколько онъ заплатилъ за каждое, покажетъ слѣдующее представленіе:

за 1, 2, 3, 4, 5, — — — x
 платилъ 2, 4, 6, 8, 10, ..., $(x-1)2 + 2 = 2x$.

И что бы найти цѣну всѣхъ суконъ, то должно арифметическую прогрессію 2, 4, 6, 8, 10 — — $2x$ состоящую изъ x членовъ сложить въ одну сумму, чего ради по вышеобъявленному правилу сложимъ первый членъ съ послѣднимъ, и будетъ $2x + 2$, сумму умножь на число членовъ x , въ произведеніи $2xx + 2x$ производящую двойную сумму прогрессіи раздели на 2, и получится искомая сумма

про-

прогрессіи $xx + x$, которая должна быть равна 110.

Вычти x , то будетъ $xx = -x + 110$
 слѣд. $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 110}$ или $x =$
 $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 110} = -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = 10.$

Отвѣтъ. Всѣхъ суконъ куплено было 10 кусковъ.

653.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ нѣсколько суконъ за 180 талер., и ежели бы за тѣ же деньги можно было взять сѣдс три куска, тобъ каждой кусокъ пришелъ ему дешевле 3 мя талерами, спрашивается сколько всѣхъ суконъ онъ купилъ?

Число суконъ пусть будетъ x , то каждой кусокъ дѣйствительно стоилъ $\frac{180}{x}$ талеровъ, а ежели бы онъ получилъ $x + 3$ куска за 180 талер. тобъ каждой кусокъ обошелся въ $\frac{180}{x+3}$ талер., которая цѣна 3 мя талерами меньше, нежели самая настоящая; чего ради получимъ мы уравненіе $\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$;

Е 3

умножь

86 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

умножь на x и будешъ $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$,

раздѣли на 3, выдешъ $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$,

умножь на $x+3$, получится $60x = 60x$
 $+ 180 - xx - 3x$,

придай xx , будешъ $xx + 60x = 180 + 57x$

вычши $60x$, выдешъ $xx = -3x + 180$;

откуда $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 180\right)}$ или $-\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12$.

Отвѣтъ. За 180 талеровъ куплено 12 суконъ, по чему каждое стоило 15 талеровъ; если же бы онъ взялъ 3 куска больше, то есть 15 за 180 талеровъ, тобъ каждое стоило 12 талеровъ, то есть время меньше, нежели въ самомъ дѣлѣ.

654.

Вопросъ. Двое положили въ тургъ 100 талеровъ, первой оставляетъ деньги свои на 3 мѣсяца, а другой только на 2 въ компаніи, и каждой изъ нихъ взялъ 99 талеровъ вмѣстѣ съ капита-
 ломъ

домъ и барышемъ, спрашивается сколько каждой изъ нихъ положилъ?

Ежели первой положилъ x талеровъ, то другой 100 x , и когда первой беретъ 99 талеровъ, то барышь его $= 99 - x$, которой онъ получилъ въ 3 мѣсяца на капиталъ x ; другой беретъ также 99 талеровъ, и выигрышъ свой $= 99 - 100 + x = x - 1$, которой онъ приобрѣлъ въ 2 мѣсяца на капиталъ 100 $- x$, на сей же самой капиталъ 100 $- x$ въ три мѣсяца можно бы получить $\frac{3x-3}{2}$, слѣд. сии выигрыши капиталамъ пропорціональны, то есть, перваго капиталъ содержится къ его выигрышу, такъ какъ капиталъ втораго къ своему выигрышу, такъ.

$x : 99 - x = 100 - x : \frac{3x-3}{2}$ положивъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ равными будемъ $\frac{3x^2}{2} - 3x = 9900 - 199x + xx$, умножь на 2, будемъ $3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx$, вычти $2xx$, остан. $xx - 3x = 19800 - 398x$, придай $3x$ ——— $xx = -395x + 19800$;

по чему $x = -\frac{895}{2} + \frac{\sqrt{156025}}{4} + \frac{79203}{4}$
или $x = -\frac{395}{2} + \frac{445}{2} = \frac{90}{2} = 45$.

Отвѣтъ. По сему первой положилъ 45 талеровъ, а другой 55: 45 тью талерами въ 3 мѣсяца выигралъ первой 54 талера, и слѣд. въ одинъ бы мѣсяцъ получилъ прибыли 18 талеровъ.

Другой съ 55 тью талерами въ 2 мѣсяца получаетъ прибыли 44 талера, слѣд. въ одинъ бы мѣсяцъ досталъ 22 талера, что съ борышемъ перваго также сходно; ибо когда на 45 талер. въ 1 мѣсяцъ выигрываетъ 18 талер., то на 55 въ то же время получится 22 талера.

655.

Вопросъ. Двѣ крестьянки несутъ на рынокъ 100 яицъ, у одной больше нежели у другой; денегъ же выручаяющъ поровну. Первая говоритъ другой если бы твои яйца были у меня, то бы выручила я 15 крейцеровъ, на что другая отвѣтствуетъ, а если бы твоя
яица

лицы имѣла я, тобы я за нихъ взяла 6 $\frac{2}{3}$ крейцера ; спрашивается сколько у каждой было ?

Положимъ что первая имѣла x яицъ , то другая $100-x$, чего ради ежели бы первая $100-x$ продала за 15 крейцеровъ , то пославъ тройное правило

$$100-x : 15 = x : \frac{15x}{100-x} \text{ крейцеровъ : по-}$$

добнымъ образомъ надлежитъ поступать и въ другомъ случаѣ , то есть , когда другая x яицъ продать хотѣла за 6 $\frac{2}{3}$ крейцера , найти можно , сколько она за свои $100-x$ яицъ выручила, а именно;

$$x : \frac{20}{3} = 100-x : \frac{2000-20x}{3x} \text{ крейцер. ;}$$

и послѣку обѣ крестьянки выручили поровну , то будетъ у насъ уравненіе $\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x}$, которое умножь на $3x$ будетъ $\frac{45xx}{100-x} = 2000-20x$

умножь еще на $100-x$ получится $45xx = 200000 - 4000x + 20xx$, вычл. $20xx$ останется $25xx = 200000 - 4000x$

90 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХЪ

раздѣли на 25, выйдетъ $xx = -160x + 8000$,
и слѣдовательно $x = -80 + \sqrt{(6400 + 8000)}$

$$\text{или } x = -80 + 120 = 40.$$

Отвѣтъ. У первой было 40 яицъ, а
у другой 60, и каждая изъ нихъ выручила
10 крейцеровъ.

656.

Вопросъ. Двое продали нѣсколько
локтей бархату, второй 3 локтя боль-
ше первого, а выручаютъ вмѣстѣ 35
талеровъ; первой другому говоритъ,
за твоей бархатъ могъ бы я взять 24 та-
лера, другой ему отвѣтствовалъ, а я бы
за твоей взялъ $12\frac{1}{2}$ талера; спрашивается
сколько локтей каждой изъ нихъ имѣлъ?

Положимъ что у первого было x лок-
тей, то у другого $x + 3$ локтя; и ко-
гда бы первой за $x + 3$ локтя взялъ 24
талера, слѣд. свои x локтей продалъ онъ
за $\frac{24x}{x+3}$ талера, и когда другой x локтей
хочетъ продать за $12\frac{1}{2}$ талера, то свои
 $x + 3$ локтя продалъ онъ за $\frac{25x + 75}{2x}$,

2x

Р

и оба вмѣстѣ выручили они $\frac{24x}{x+3}$

$$+ \frac{25x + 75}{2x} = 35,$$

$$\text{или } \frac{48xx + 25x + 75}{x+3} = 70x.$$

$$\text{или } \frac{48xx}{x+3} = 45x - 75,$$

умножь на $x+3$, $48xx = 45xx + 60x - 225$,

$$\text{вычши } 45xx, \quad 3xx = 60x - 225,$$

$$\text{или } xx = 20x - 75;$$

$$\text{откуда } x = 10 \pm \sqrt{(100 - 75)} = 10 \pm 5.$$

Ошвѣтъ. Сей вопросъ имѣетъ два рѣшенія, по первому первой имѣетъ 15 локтей, а другой 18, и понеже первой 18 аршинъ хотѣлъ продать за 24 тал., то за свои 15 взялъ онъ 20 талер. другой за 15 локшей хотѣлъ взять 12 $\frac{1}{2}$ тал., то за свои 18 взялъ онъ 15 талер.; и оба взяли 35 тал.

По второму рѣшенію, первой имѣетъ 5 локшей, а другой 8, первой про-
далъ

далъ бы 8 локтей за 24 талера , то
свои 5 продалъ за 15 талер. Другой 5
локтей первого продалъ бы за $12\frac{1}{2}$ талер.
слѣд. за свои 8 выручилъ онъ 20 тале-
ровъ, и оба вмѣстѣ 35 талеровъ.



ГЛАВА VII.

Объ извлеченіи корней изъ многоугольныхъ
чиселъ.

6:7.

Выше сего уже мы показали , какъ
многоугольные числа находятся , и что
мы тамо бокомъ называли, то называет-
ся также и корнемъ. Ежели корни оу-
начатся буквою x , то многоугольные
числа найдутся слѣдующія :

3 угольное будетъ $\frac{xx+x}{2}$

4 " " " $\sqrt{\quad}$ " " " xx

$$5 \text{ угольное будетъ } \frac{3xx-x}{1}$$

$$6 \text{ " " } \frac{2xx-x}{1}$$

$$7 \text{ " " } \frac{5xx-3x}{2}$$

$$8 \text{ " " } \frac{3xx-2x}{1}$$

$$9 \text{ " " } \frac{7xx-5x}{2}$$

$$10 \text{ " " } \frac{4xx-3x}{1}$$

$$n \text{ " " } \frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$$

658.

Помощью сей формулы не трудно для каждаго бока или корня сыскать многоугольное число, сколь бы велико число угловъ ни было, о чемъ уже и выше сего упомянуто. Если же обрат-
но дано будетъ многоугольное число нѣ-
сколькихъ сторонъ, то корень его или
бокъ находить гораздо труднѣе; ибо для
сего требуется рѣшеніе квадратнаго ура-
вненія

§4 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

вненія. По чему матерія сія особливаго разсмотренія досшойна.

Начнемъ сперва съ треугольныхъ , а потомъ приступимъ и къ многоугольнымъ числамъ.

659.

Данное треугольное число пусть будетъ 91, сыскать его бокъ или корень?

Положи искомой корень $= x$, то должно быть $\frac{xx+x}{2} = 91$, умножь на 2 , выдешъ $xx+x=182$, вычти x , останется $xx=-x+182$ и слѣдоват. $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+182}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{729}{2}}=13$; слѣд. искомой треугольника корень $= 13$, потому что треугольникъ изъ 13 $= 91$.

660.

Пусть будетъ вообще данное треугольное число a , котораго корень найти должно.

Искомой корень пусть будетъ $= x$, то $\frac{xx+x}{2} = a$, или $xx+x=2a$, и $xx=-x+2a$, откуда $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2a}$ или $x=-\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

Отсюда

Отсюда получаемъ мы сіе правило :
умножь данное треугольное число на 8,
къ произведенію придай 1, изъ суммы
извлеки квадратной корень, и изъ сего
вычти единицу ; остатокъ раздѣли на 2,
частное дастъ искомой треугольника
корень.

661.

Отсюда явствуетъ, что всѣ т. е.
угольники имѣютъ сіе свойство, по
если, когда они на 8 умножатся и къ
произведенію придастся 1, въ суммѣ все-
гда выходитъ квадратное число, какъ
изъ слѣдующей таблички видно:

3 уголи.	1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; 28 ; 36 и пр.
8 разъ + 1	9 ; 25 ; 49 ; 81 ; 121 ; 169 ; 225 ; 289 и пр.

Если же данное треугольное число
а сего свойства не имѣетъ, то сіе зна-
читъ, что оно не дѣйствительное тре-
угольное число, или что корня его въ
раціональныхъ числахъ показать не лзя.

662.

По сему правилу чпо бы сыскать корень зугольнаго числа 210 , будетъ $a = 210$, $8a + 1 = 1681$, коего квадратной корень 41 ; ошсюда видно , чпо число 210 есть дѣйствительное треугольное число , коего корень $= \frac{41-1}{8} = 20$.

Ежели бы число 4 взято было какъ зугольное число , коего бы корень найти должно было , то оной былъ бы $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$, слѣд. неизвлекаемой , какъ и дѣйствительной изъ сего корня зугольникъ найдется слѣдующимъ образомъ.

Понеже $x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, то $xx = \frac{17-\sqrt{17}}{2}$, къ сему приложивъ x , будетъ $xx + x = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$, и слѣд. треугольное число $\frac{xx+x}{2} = 4\frac{1}{4}$.

Поелику четырехугольные числа тоже самое суть чпо и квадратныя , слѣдовательно не имѣютъ они ни малейшя трудности ; ибо положивъ четырехугольное число $= a$, и слѣд. $x = \sqrt{a}$, по сему
ква-

му квадратные и чепыреугольные корни
одно значать,

664.

Приспупимъ шеперь къ пятиуголь-
нымъ числамъ. Пусть будетъ 22 пяти-
угольное число, и корень его $= x$, то
должно быть $\frac{xx-x}{2} = 22$ или $3xx-x=44$,
или $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$, откуда найдется $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{44}{3})}$, то есть: $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{157}{36}} = \frac{1}{3} + \frac{12}{3} = 4$ слѣд. 4 есть искомой пятиугольной
корень числа 22.

665.

Пусть предложенъ будетъ вопросъ :
даннаго пятиугольнаго числа а сыскать
корень?

Искомой корень положи $= x$, и най-
дется уравненіе $\frac{xx-x}{2} = a$, или $3xx-x=2a$,
или $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$, откуда $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3})}$,
то есть: $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1+24a}{36}}$, и такъ ежели а
будетъ дѣйствительной пятиугольникъ,
то $24a+1$ должно быть всегда квадрат-
ное число.

Толк: II.

Ж

Пусть

98 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНІЯХЪ

Пусть будетъ напр. 330 данной пятиугольникъ , то корень его $x = \frac{1+\sqrt{521}}{6} = \frac{1+23}{6} = 4$.

666.

Даннаго шестиугольнаго числа а , сыскаль его корень ?

Положи его $= x$, то будетъ $2xx - x = a$, или $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, откуда $x = \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}a)} = \frac{1+\sqrt{1+a}}{2}$ и такъ когда а есть действительной шестиугольникъ , то $8a + 1$ долженъ быть квадратъ. Отсюда видно, что всѣ шестиугольныя числа содержатся въ треугольныхъ , корни же ихъ отрицательнаго свойства.

Пусть будетъ напр. 6тиугольное число 1225 , то корень его $x = \frac{1+\sqrt{9201}}{6} = \frac{1+96}{6} = 16$.

667.

Даннаго семиугольнаго числа а , найди его бокъ или корень ?

Положи искомой корень $= x$, то будетъ $\frac{5xx - 1x}{2} = a$, или $5xx - 3x = 2a$, или $xx = \frac{3x}{5} + \frac{2a}{5}$, откуда $x = \frac{3}{10} + \sqrt{(\frac{9}{100} + \frac{2a}{5})}$

$= 1 + \sqrt{\frac{40a+9}{10}}$. И такъ всѣ семиугольныя числа суть такого состоянія, что ежели они на 40 умножаются и къ произведенію придастся 9, сумма всегда должна быть квадратное число.

Пусть будетъ напр. семиугольникъ 2059, то корень его найдётся $x = \frac{1 + \sqrt{83769}}{10}$
 $= \frac{1 + 289}{10} = 29$.

668.

Даннаго осьмиугольнаго числа a сыскать корень x ?

Въ семъ случаѣ будетъ $3xx - 2x = a$,
 или $xx = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$, откуда $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{a}{3}\right)}$
 $= \frac{1 + \sqrt{3a+1}}{3}$

3

По сему всѣ осьмиугольныя числа имѣютъ свойство такое, что когда они умножаются на 3, и къ произведенію придастся 1, сумма всегда быть должна квадратное число.

Пусть будетъ наприм. 8угольное число 3816, то корень его $x = \frac{1 + \sqrt{11449}}{3}$
 $= \frac{1 + 107}{3} = 36$.

3

Ж 2

669.

669.

Наконецъ пусть будетъ дано n ,
угольное число a , сыскать его корень x ?
Въ семъ случаѣ будетъ $\frac{(n-2)xx - (n-4)x}{2}$

$= a$, или $(n-2)xx - (n-4)x = 2a$, или
 $xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$.

откуда $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right)}$
 $= \frac{(n-4)}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{(n-4)^2 + 8a(n-2)}{4(n-2)^2}}$

следов: $x = \frac{n-4 + \sqrt{8(n-2)a + (n-4)^2}}{2(n-2)}$

Сія формула содержитъ въ себѣ общее правило, изъ данныхъ чиселъ находить всѣ возможные многоугольные корни.

А дабы сіе изъяснить примѣромъ, то пусть дано будетъ 24 угольное число 3009, и понемъ здѣсь $a = 3009$, $n = 24$,
 $n-2 = 22$, $n-4 = 20$, то будетъ корень
 $x = \frac{20 + \sqrt{129184 + 4000}}{44} = \frac{20 + 724}{44} = 17$.



ГЛАВА VIII.

О извлеченіи квадратныхъ корней изъ биномія , или двучленного числа.

670.

Биномій въ Алгебрѣ называется число изъ двухъ частей состоящее , изъ коихъ одна, или обѣ коренной знакъ при себѣ имѣютъ. Какъ $3 + \sqrt{5}$ есть биномія , также $\sqrt{3} + \sqrt{3}$; припомъ все равно, какимъ бы знакомъ сіи двѣ части ни соединены были , но если или знакомъ $+$, или $-$, слѣд. $3 - \sqrt{5}$ будетъ также биномій называться, какъ и $3 + \sqrt{5}$.

671.

Сіи биноміи особливо для того примѣчанія достойны , что при разрѣшеніи квадратныхъ уравненій такія формулы подаются , ежели рѣшеніе не можеть быть раціонально.

Такъ когда случится уравненіе $xx = 6x - 4$, то будетъ $x = 3 + \sqrt{5}$. Для сей при-

Ж 3

чины

чины, такія формулы весьма часто попадаются въ Алгебраическихъ выкладкахъ, и мы уже выше сего показали, какимъ образомъ обыкновенныя дѣйствія сложеныя, вычитанія, умноженія и дѣленія съ такими числами дѣлаются; а теперь покажемъ какимъ образомъ изъ такихъ формулъ и квадратной корень извлекать надлежитъ, ежели такое извлеченіе учинится можетъ; въ противномъ случаѣ приставляясь къ ней еще коренной знакъ, то есть квадратной корень изъ $3 + \sqrt{2}$ есть $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$.

672.

При семъ примѣчать надлежитъ, что квадраты такихъ биноміевъ суть также биноміи, въ коихъ одна часть рациональна.

Ибо когда ищется квадратъ изъ $a + \sqrt{b}$, то будетъ оной $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$, такъ что ежели изъ формулы $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$ потребуется опять квадратной корень, то будещъ оной $a + \sqrt{b}$, которой бесспорно лучше уразумѣть можно, нежели когдабъ

когдабъ предъ прежнею формулою еще знакъ $\sqrt{}$ поставился. равнымъ образомъ ежели формулы $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ возьмется квадратъ, которой будетъ $(a + b) + 2\sqrt{ab}$, то обратно изъ формулы $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ корень будетъ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, которая формула также простая, какъ когда предъ прежнею знакъ $\sqrt{}$ поставленъ будетъ.

673.

Чего ради въ семъ случаѣ нужно только сыскать характеръ, по которому бы всегда узнавать можно было, имѣетъ ли такой квадратной корень мѣсто или нѣтъ. На сей конецъ возьмемъ мы какую нибудь легкую формулу и рассмотримъ, можноли изъ биномія $5 + 2\sqrt{6}$ симъ образомъ найти квадратной корень.

Положи что сей корень $= \sqrt{x} + \sqrt{y}$, всего квадратъ $= (x + y) + 2\sqrt{xy}$ и которой долженъ быть равенъ $5 + 2\sqrt{6}$; слѣд. рациональная часть $x + y$ должна быть $= 5$, а неизвлекаемая $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6}$, откуда происходитъ $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$, и взявъ

съ обѣихъ сторонѣ квадраты , будетъ $xу=6$; и когда $x+y=5$, то $y=5-x$, которую величину положи въ уравненіе $xу=6$, выдѣль $5x-xx=6$, или $xx=5x-6$ слѣд. $x=\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{4}-\frac{24}{4}\right)}=\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}=3$.

И такъ когда $x=3$, то $y=2$, и корень квадратной изъ $5 \pm 2\sqrt{6}$ будетъ $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

674.

Имѣя здѣсь сіи два уравненія I.) $x+y=5$; II.) $xу=6$ покажемъ особливой путь , какъ , и осптуда находить x и y , которей состоятъ въ слѣдующемъ :

Понежъ $x+y=5$, то возми квадраты $xx+2xy+yy=25$, и замѣнь, что $xx-2xy+yy$ есть квадратъ изъ $x-y$; изъ уравненія $xx+2xy+yy=25$ вычми $yy=6$ 4жды взятое, или $4xy=24$, то получишь $xx-2xy+yy=1$, коего корень квадратной $x-y=1$, и поелику $x+y=5$, то будетъ $x=3$, $y=2$; по сему искомой корень изъ $5 \pm 2\sqrt{6}$ есть $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

675.

675.

Разсмотримъ теперь сей общей биномий $a + \sqrt{b}$. Положа квадратной его корень $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ получимъ уравненіе $(x+y) + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$, гдѣ $x+y=a$ и $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$, или $4xy=b$ квадратъ изъ $x+y=a$ есть $xx + 2xy + yy = aa$, вычши изъ него $4xy=b$, и будемъ $xx - 2xy + yy = aa - b$, коста квадратной корень $x-y = \sqrt{aa-b}$, и нѣже $x+y=a$, то найдемъ $x = \frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}$ и $y = \frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}$.

Слѣдовательно искомой квадратной корень изъ $a + \sqrt{b}$ будетъ $\sqrt{\frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}}$.

676.

Сія формула гораздо связнѣе, нежели какъ когдабъ предъ данными биноміемъ $a + \sqrt{b}$ поставленъ былъ просто коренной знакъ $\sqrt{}$, то есть $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. Но она облегчится, ежели числа a и b будутъ такого соотвѣщенія, что $aa-b$ будетъ точной квадратъ, ибо тогда $\sqrt{}$ позади кореннаго знака $\sqrt{}$ пропадетъ. Отсюда видно что только въ тѣхъ слу-

Ж 5

чаяхъ

ГЛАВА ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХ.

чаяхъ изъ биномія $a \pm \sqrt{b}$ квадратной корень извлечь можно, когда $aa - b = cc$; и тогда искомой квадратной корень будетъ $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, когда же $aa - b$ не квадратное число, то квадратнаго корня способѣ означить нельзя, какъ кореннымъ знакомъ $\sqrt{}$.

677.

Отсюда получаемъ мы правило для способѣйшаго означенія квадратнаго корня изъ биномія $a \pm \sqrt{b}$. Къ сему требуется чтобъ $aa - b$ было квадратное число, и ежели оно $= cc$, то искомой квадратной корень будетъ $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; причемъ еще примѣчать надлежитъ, что квадратной корень изъ $a - \sqrt{b}$ есть $\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; ибо ежели сей формулы возмется квадратъ, то оной будетъ $a - 2\sqrt{\frac{aa - cc}{4}}$; а поелику $cc = aa - b$, то $aa - cc = b$, слѣд. сей квадратъ $= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \sqrt{b}$.

678.

И такъ когда изъ биномія $a \pm \sqrt{b}$, должно будетъ извлечь корень квадратной

ной, то вычти квадратъ рациональной части aa изъ квадрата ирраціональной b , изъ остатка извлеки корень квадратной, которой пусть будетъ c ; по сему требуемой квадратной корень $= \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

679.

Если должно будетъ найти квадратной корень изъ $2 + \sqrt{3}$, то будетъ $a=2$, $b=3$ и $aa-b=1$, коего корень $c=1$, слѣдоват. искомой квадратной корень $= \sqrt{\frac{2}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Пусть будетъ еще биномъ $11 + 6\sqrt{2}$, то въ немъ $a=11$, $\sqrt{b}=6\sqrt{2}$, и $b=36 \cdot 2=72$ и $aa-b=49$, слѣд. $c=7$, и квадратной корень изъ $11 + 6\sqrt{2}$ будетъ $\sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

Найти квадратной корень изъ $11 - 2\sqrt{30}$: здѣсь $a=11$, $\sqrt{b}=2\sqrt{30}$, $b=120$ и $aa-b=1=c$ слѣд. искомой корень $= \sqrt{6} - \sqrt{5}$.

680.

Сие правило имѣетъ также мѣсто, когда въ задачѣ случатся мнимыя или невозможныя числа.

Такъ ежели данъ будетъ сей биномъ $1+4V-3$, то $a=1$, $Vb=4V-3$ и $b=16-3=-43$, $aa-b=4$; слѣд. $c=7$, и искомой квадратной корень будетъ $V4+V-3=2+V-3$.

Пусть дано будетъ еще $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}V-3$, то $a=-\frac{1}{2}$, $Vb=\frac{1}{2}V-3$, и $b=\frac{1}{4}-3=-\frac{11}{4}$; откуда $aa-b=\frac{1}{4}+\frac{11}{4}=3$; и $c=1$, слѣд. искомой квадратной корень $=V\frac{1}{4}+V-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}V-3$, или $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}V-3$.

Слѣдующей примѣръ, въ которомъ ищется квадратной корень изъ $2V-1$, примѣчанія достойнъ. По елику здѣсь рациональн. й части не находится, то $a=0$, $Vb=2V-1$, и $b=-4$, а $aa-b=4$ слѣд. $c=2$; почему искомой корень будетъ $V1+V-1=1+V-1$, коего квадр. $1+2V-1-1=2V-1$.

681.

Если бы надлежало разрѣшить уравненіе такое, какъ $xx = a \pm \sqrt{b}$, и было бы $aa - b = cc$, то величина x нашлася бы $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, что во многихъ случаяхъ имѣетъ немалую пользу.

Пусть будетъ напр. $xx = 1 \pm 12\sqrt{2}$, то будетъ $x = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

682.

Сіе имѣетъ мѣсто особливо при разрѣшеніи уравненій четвертой степени, какъ $x' = 2axx + d$; ибо когда здѣсь положится $xx = y$, то $x' = y'$, слѣд. данное уравненіе перемѣнится въ $yy = 2ay + d$, откуда найдется $y = a \pm \sqrt{a^2 + d}$; чего ради мѣсто перваго уравненія будетъ $xx = a \pm \sqrt{a^2 + d}$; откуда надлежитъ извлечь еще квадратной корень; понеже здѣсь $\sqrt{b} = \sqrt{aa + d}$ и $b = aa + d$, то будетъ $aa - b = -d$, и если $-d$ будетъ к адрату, то есть: cc или $d = -cc$, то можно будетъ изъяснить и корень. Почему пусть будетъ $d = -cc$, или дано сіе

ПО ОСЬ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХ.

сіе уравненіе 4 той степени $x^4 - 2axx - cc$,
то величина x изъ него найдется $x =$
 $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$

683.

Изъяснимъ теперь сіе нѣсколькими
примѣрами.

Сыскапъ два числа, коихъ произведеніе
равно 105 . а сумма ихъ квадратовъ
равна 274 ?

Положи искомыя числа x и y , то
получатся потчасъ два уравненія I) xy
 $= 105$; II) $x^2 + y^2 = 274$, изъ перваго на-
ходяпся $y = \frac{105}{x}$, что положи мѣсто y , во
второмъ уравненіи будетъ $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$,
умножь на xx , и будетъ $x^4 + 105^2 = 274$
 xx , или $x^4 = 274xx - 105^2$; и естли сіе
сравнимъ съ прежнимъ уравненіемъ , то
будетъ $2a = 274$, и $a = 137$, $-cc = -105^2$,
слѣдов. $c = 105$, откуда найдется $x =$
 $\sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4$. слѣдова-
тельно x равно или 15, или 7 , въ пер-
вомъ случаѣ $y = 7$, а во второмъ $= 15$,
по чему оба искомыя числа суть 15 и 7.

684.

684.

Здѣсь примѣчать надлежитъ , что выкладка сія еще легче здѣлана быть можетъ ; ибо когда $xx + 2xy + yy$ и $xx - 2xy + yy$ суть квадраты , припомъ какъ $xy + yy$, такъ и $xу$ извѣстны , то послѣднее надлежитъ только удвоить , и какъ къ первому приложить , такъ изъ него и вычесть , какъ здѣсь видно:

$xx + yy = 274$, приложи сперва $2xy$ и будетъ $xx + 2xy + yy = 484$ и $x + y = 22$, потомъ вычти $2xy$, и будетъ $xx - 2xy + yy = 64$ и $x - y = 8$; отсюда будетъ $2x = 30$, и $x = 15$; $2y = 14$ и $y = 7$. Подобнымъ сему образомъ можетъ разрѣшенъ быть и сей общій вопросъ. Сыскавъ два числа , коихъ произведение $= m$, и сумма ихъ квадратовъ $= n$?

Искомыя числа пусть будутъ x и y , то найдутся два слѣдующія уравненія: I) $xy = m$; II) $xx + yy = n$; $2xy = 2m$, чего ради придавъ $2xy$ выдетъ $xx + 2xy + yy = n + 2m$, и $x + y = \sqrt{n + 2m}$, потомъ вычти $2xy$, и будетъ $xx - 2xy + yy$

$$\begin{aligned}
 &+ yu = n - 2m, \text{ то } x + y = \sqrt{n - 2m}, \\
 &\text{откуда } x = \frac{1}{2} \sqrt{n + 2m} + \frac{1}{2} \sqrt{n - 2m} \\
 &\text{и } y = \frac{1}{2} \sqrt{n + 2m} - \frac{1}{2} \sqrt{n - 2m};
 \end{aligned}$$

685.

Пусть предложень будеть еще сей вопросъ: сыскать два числа, коихъ произведеніе $= 35$, и разность квадратовъ ихъ $= 24$?

Положи большее искомое число x , а меньшее y , и выдешъ два уравненія, I) $xy = 35$; II) $x^2 - y^2 = 24$, и поелику въ прежнемъ случаѣ употребленная выгода здѣсь мѣста не имѣетъ, то поступай обыкновеннымъ образомъ, и найдется изъ перваго уравненія $y = \frac{35}{x}$, что положивъ во второмъ уравненіи мѣсто y дастъ $xx - \frac{1225}{xx} = 24$, умножь на xx и будетъ $x^4 - 1225 = 24xx$ или $x^4 = 24xx + 1225$. Поелику здѣсь послѣдней членъ имѣетъ знакъ плюсъ, то прежняго уравненія здѣсь употребить не лзя, потому что $cc = -1225$, и слѣд. с было бы не возможно.

Длѣ

Для сей причины кладется $xx = z$ и выходитъ $zz = 24z + 1225$, откуда $z = 12 + \sqrt{144 + 1225}$ или $z = 12 + 37$, слѣдов. $xx = 12 + 37$, то есть $xx = 49$ или $xx = -25$; по первому знаменованію будетъ $x = 7$ и $y = 5$; а по другому $x = \sqrt{-25}$, и $y = \sqrt{-25}$, или $= \sqrt{\frac{1225}{-25}}$, или $= \sqrt{-49}$.

686.

Въ заключеніе сей главы прибавимъ еще сей вопросъ :

Найти два числа, коихъ сумма, произведеніе и разность квадратовъ равны между собою?

Большее число пусть будетъ x , а меньшее y , то сии три формулы должны быть равны между собою I) $x + y$; II) xy ; III) $xx - yy$; и если первая сравнивается со второю, то будетъ $x + y = xy$, отсюда ищи x ; ибо $y = xy - x = x(y - 1)$.

то $x = \frac{y}{y - 1}$, слѣд. $\frac{xy}{y - 1} = x + y$, и $xy = \frac{y^2}{y - 1}$, и слѣд. сумма равная произве-

Тамъ II.

3

денію

денно должна быть также равна разности квадратовъ, и припомъ будетъ $xx - yy = \frac{yy}{yy - 2y + 1} - yy = \frac{-y^2 + 2y^3}{yy - 2y + 1}$, что

$$-yy = \frac{yy}{yy - 2y + 1} - yy = \frac{-y^2 + 2y^3}{yy - 2y + 1}, \text{ что}$$

прежней величинѣ $\frac{yy}{y-1}$ равно; того

$$\text{ради будетъ } \frac{yy}{y-1} = \frac{-y^2 + 2y^3}{yy - 2y + 1}, \text{ раздѣли}$$

$$\text{на } yy \text{ и будетъ } \frac{1}{y-1} = \frac{-yy + 2y}{yy - 2y + 1}, \text{ по-}$$

семъ умножь на $y - 1$, выдѣль $1 =$

$$\frac{-yy + 2y}{y-1}, \text{ умножь еще на } y-1, \text{ будетъ}$$

$$y-1 = -yy + 2y, \text{ слѣдов. } yy = y-1,$$

отсюда найдется $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \text{ чего ради } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1},$$

а что бы здѣсь вывести коренной знакъ

изъ знаменателя, то умножь сверху и

$$\text{снизу на } \sqrt{5} + 1, \text{ и будетъ } x = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Отвѣтъ.

Отвѣтъ. Бoльшее искомое число $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, а меньшее $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; ихъ сумма $x + y = 2 + \sqrt{5}$, произведеніе $xy = 2 + \sqrt{5}$, и поелику $xx = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$ и $yy = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, то разность квадратовъ $xx - yy = 2 + \sqrt{5}$.

687.

Поелику показанное рѣшеніе нѣсколько трудновато, то легче можно его здѣлать симъ образомъ: положи сперва $x + y$ равно разности квадратовъ $xx - yy$, то есть: $x + y = xx - yy$; и понеже здѣсь можно раздѣлить на $x + y$, попому что $xx - yy = (x + y)(x - y)$, то получится $1 = x - y$, откуда $x = 1 + y$, и слѣдовательно $x + y = 2y + 1$, и $xx - yy = 2y + 1$, что должно быть еще равно произведенію $xy = yy + y$; почему $yy + y = 2y + 1$, откуда такъ какъ и прежде найдемся $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3 2

688.

Сие ведетъ насъ еще къ слѣдующему вопросу: сыскать два числа, коихъ сумма, произведение и сумма ихъ квадратовъ равны между собою?

Искомая числа пусть будутъ x и y , то слѣдующіе три формулы равны между собою, то есть: I) $x+y$; II) xy ; III) $xx+y$.

Ежели первая изъ нихъ уравниется со второй, то есть, положимъ $x+y = xy$, то найдемъ $x = \frac{y}{y-1}$, и $x+y = \frac{yy}{y-1}$, что равно также xy , и отсюда

$$xx+y = \frac{yy}{yy-2y+1} + y, \text{ что положи}$$

равно $\frac{yy}{y-1}$. Умножь на $(y-1)^2$, и будешь $y^4 - 2y^3 + 2yy = y^4 - yy$, или $y^4 = 3y^3 - 3yy$; раздели на yy , произойдетъ $y^2 = 3y - 3$ и $y = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$,
отсю-

отсюда $y - 1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, слѣд. $x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{1 + \sqrt{-3}}$,
 умножь сверху и снизу на $1 - \sqrt{-3}$, по
 будетъ $x = \frac{6 - 2\sqrt{-3}}{4}$, или $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$

Отвѣтъ. Оба искомыя числа будутъ
 $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$ и $y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$; сумма ихъ
 $x + y = 3$, произведеніе $xy = 3$; и когда
 $xx = \frac{3 - 3\sqrt{-3}}{2}$ и $yy = \frac{3 + 3\sqrt{-3}}{2}$, то
 будетъ $xx + yy = 3$.

689.

Сія выкладка не мало облегчиться
 можеть особливѣмъ къ тому средствомъ,
 что такожде и въ другихъ случаяхъ упо-
 треблять можно; а состоитъ оно въ томъ,
 чтобъ искомыя числа не двумя разными
 буквами, но суммою и разностию двухъ
 другихъ изъявлено было.

Такъ въ первой задачѣ положи одно
 искомое число $p + q$, а другое $p - q$, сум-
 ма ихъ $= 2p$, произведеніе $= pp - qq$, а
 3 2 сумма

сумма ихъ квадратовъ $2pp + 2qq$; всѣ
 сѣи при часпи должны быть между собою
 равны. Положи первую равну второй,
 т. е. $2p = pp - qq$, отсюда $qq = pp - 2p$.
 Сѣе знаменованіе положи въ третей
 формулѣ мѣсто qq , то будетъ $4pp - 4p$,
 что уравнивъ съ первой будетъ $2p = 4pp$
 $- 4p$, придай $4p$ и выдѣлѣ $6p = 4pp$ раз-
 дѣли на p , выдѣлѣ $6 = 4p$ слѣдов. $p = \frac{3}{2}$.

Отсюда $qq = -\frac{3}{2}$ и $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$, слѣдов.
 искомые числа будутъ $p + q = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$
 и другое $p - q = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$, какъ и прежде.



ГЛАВА IX.

О свойствѣ квадратныхъ уравненій.

690.

Изъ предположаннаго видно было, что
 каждое квадратное уравненіе двоякимъ
 образомъ рѣшиться можетъ, которое
 свойство заслуживаетъ особое примѣ-
 чаніе,

чаніе; ибо чрезъ то и вышшихъ степеней уравненій не мало облегчаются. Чего ради разсмотримъ теперь, для чего каждое квадратное уравненіе двоякое рѣшеніе имѣетъ; поелику въ семъ важное свойство сихъ уравненій заключается.

691.

Хотя уже извѣстно, что сіе двойное рѣшеніе начало свое имѣетъ отътуда, что изъ каждаго числа квадратной корень, какъ положительной, такъ и отрицательной ваятъ быть можетъ. Но поелику причины сей при вышшихъ уравненіяхъ употребить не лзя, то не излишно будетъ, основаніе онаго показать еще инымъ образомъ, то есть: здѣсь изъяснить надобно, для чего квадратное уравненіе, какъ на прим. $xx = 12x - 35$ двоякимъ образомъ рѣшено быть можетъ, или что для x двѣ величины опредѣлены быть могутъ, изъ коихъ каждая рѣшитъ данной вопросъ. Такъ въ семъ примѣрѣ мѣсто x можно взять какъ 5, такъ и 7:

2 4

ибо

ибо въ обоихъ случаяхъ будетъ $xx = 12x - 35$.

692.

Для лучшаго изъясненія сего основанія, перенеси всѣ члены уравненія на одну сторону, такъ чтобъ на другой сторонѣ былъ 0; почему прежнее уравненіе перемѣнится въ $xx - 12x + 35 = 0$. Причемъ требуется найти только такое число, которое если поставиши вмѣсто x , формула $xx - 12x + 35$ была бы дѣйствительно равна 0, а потомъ уже показать должно причину, для чего сіе двоякимъ образомъ учиниться можетъ.

693.

Вся сила состоятъ въ томъ, что бы показать, что формула $xx - 12x + 35$ можетъ почтѣться за произведеніе изъ двухъ множителей; какъ и дѣйствительно формула сія состоятъ изъ двухъ множителей $(x - 5)(x - 7)$; чего ради когда она формула должна быть 0; то и произведеніе $(x - 5)(x - 7)$ должно быть тако-

также $\equiv 0$; а произведение изъ сколькихъ бы множителей оно ни состояло, всегда будетъ 0, если только одинъ множитель $\equiv 0$; ибо сколько бы велико произведение изъ прочихъ множителей ни было, когда оно на 0 помножится, всегда выйдетъ въ произведении 0; которую истинну и при вышшихъ уравненіяхъ наблюдать надобно.

694.

Отсюда видно, что произведение $(x-5)(x-7)$ въ двухъ случаяхъ будетъ $\equiv 0$: первое, когда первой множитель $x-5 \equiv 0$ будетъ, и второе, когда второй $x-7 \equiv 0$; первое учинится положивъ $x \equiv 5$, а второе положивъ $x \equiv 7$. Изъ сего видна подлинная причина, для чего уравненіе $xx - 12x + 35 \equiv 0$ двумя образами рѣшиться можетъ, или для x двѣ величины опредѣлить можно, кои обѣ рѣшатъ уравненіе. Она причина состоитъ въ томъ, что формула $xx - 12x + 35$ представлена быть можетъ, какъ произведение изъ двухъ множителей.

3 5

695.

Сіе обстоятельство имѣетъ мѣсто при всѣхъ квадратныхъ уравненіяхъ; ибо когда всѣ члены перенесутся на одну сторону, то всегда получится такая формула, $ax - ax + b = 0$, которая равнымъ образомъ почтена быть можетъ за произведеніе изъ двухъ множителей, кои мы изобразимъ такъ: $(x - p)(x - q)$, не имѣя нужды знать, что значатъ p и q ; и когда уравненіе наше требуетъ, чтобъ сіе произведеніе было 0, то извѣстно, что сіе двоякимъ образомъ учинено быть можетъ: первое когда $x = p$, а второе когда $x = q$, что значить обѣ величины, по которымъ уравненіе разрѣша

Посмотримъ какіе сіи множители быть должны, что бы ихъ произведеніе точно нашу формулу $ax - ax + b$ дѣлало. Умножь ихъ самымъ дѣломъ, и получашся $ax - (p + q)x + pq$: что когда съ формулою $ax - ax + b$ тоже быть должно, то

то видно что $p+q$ должно быть равно a и $pq = b$, откуда познаемъ мы сіе знапіное свойство, что такого уравненія, какъ $xx - ax + b = 0$ ообъ величины сущь такого состоянія, что сумма ихъ равна числу a , а произведение $= b$, почему какъ скоро извѣстна будещъ одна величина, найдетсѣ и другая.

697.

Въ семъ случаѣ ообъ величины x имѣетъ въ знакѣ положительной, и въ уравненіи второй членъ имѣетъ знакъ $-$, а третьей $+$. Разсмотримъ теперь и сіѣ случаи, когда одна или ообъ величины x знакѣ отрицательной имѣютъ; первое учинится, когда оба множителя уравненія будутъ такія $(x-p)(x+q)$, откуда производящъ для x двѣ величины $x = p$ и $x = -q$, и самое уравненіе будетъ $xx + (q-p)x - pq = 0$, гдѣ второй членъ знакѣ $+$ имѣетъ, то есть когда q больше нежели p , ежели же бы q менше было нежели p , то бы при второмъ членѣ

нѢ стоялъ знакъ $-$; прешей же членѢ имѢетѢ здѢсь всегда знакъ $-$.

А когда оба множителя будутѢ $(x + p)(x + q)$, то обѢ величины x будутѢ отрицательныя , т. е. $x = -p$, и $x = -q$; а самое уравненіе было бы $x + (p + q)x + pq = 0$, гдѢ какъ второй , такъ и прешей члены знакъ $+$ имѢютѢ.

698.

Отсюда познаемѢ мы состояніе корней каждаго уравненія по знакамѢ второго и прешьяго членовѢ. Пусть будетѢ уравненіе $xx - - - ax - - - b = 0$, когда второй и прешей члены имѢютѢ знакъ $+$, то обѢ величины x будутѢ отрицательныя ; когда же второй членѢ знакъ $-$, а прешей $+$ имѢютѢ , то обѢ величины будутѢ положительныя ; а ежели и прешей членѢ будетѢ имѢть знакъ отрицательной , то одна величина будетѢ положительная , а другая отрицательная , и всегда второй членѢ содер-

житѢ

житъ сумму обоихъ корней ; а третей ихъ произведеніе.

699.

Теперь не трудно здѣлать такое квадратное уравненіе, которое бы по изволенью двѣ данныя величины содержало ; спрашивается напр. такое уравненіе, гдѣ одна величина x былабъ 7 , а другая - 3 : здѣлай изъ сего простое уравненіе $x=7$ и $x=-3$, попомъ $x-7=0$ и $x+3=0$, которые суть множители пребуемаго уравненія , такъ что самое уравненіе есть $xx-4x-21=0$, откуда по прежнему правилу тѣ же самыя величины для x найдутся ; ибо когда $xx=4x+21$, то будетъ $x=2 \pm \sqrt{25}$, или $x=2 \pm 5$, и такъ $x=7$ или $x=-3$.

700.

Скажется можетъ , что обѣ величины x будутъ равны между собою ; то есть , сыди такое уравненіе , гдѣ обѣ величины $x-5$, слѣдъ оба множителя будутъ $(x-5)(x-5)$, и уравненіе $xx-10x+25=0$, которое одну величину для x имѣетъ ;

имѣетъ; ибо въ обоихъ случаяхъ будетъ $x=5$. что покажетъ обыкновенное рѣшеніе такого уравненія. Когда $xx=10x-25$, то будетъ $x=5 \pm \sqrt{0}$, или $x=5 \pm 0$, слѣд. $x=5$ и $x=5$.

701.

Особливо здѣсь примѣчать надлежитъ , что иногда оба знаменованія x будутъ мнимые или невозможные , въ которыхъ случаяхъ совсѣмъ означить не можно такой величины для x , которая бы данной вопросъ рѣшила. Напр. ежели число 10 должно будетъ раздѣлится на двѣ части , коихъ бы произведе-ніе было 30 , то пусть будетъ одна часть $4x$, другая $=10-x$, а слѣд. ихъ произведе-ніе $10x-xx=30$, то есть , $xx=10x-30$ и $x=5 \pm \sqrt{-5}$, которое есть мнимое или невозможное число , и дастъ знать , что заданной вопросъ невозможенъ.

702.

И такъ не опмѣнно нужно здѣсь найти знакъ , изъ ко-го бы узнать можно

жно было , возможно ли квадратное уравненіе или нѣтъ. На сей конецъ пусть будетъ дано сіе общее уравненіе:

$xx - ax + b = 0$, по сему $xx - ax = -b$, и $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b}$, откуда явствуетъ , что когда число b больше нежели $\frac{1}{4}aa$, или $4b$ больше нежели aa , то обѣ величины будутъ не возможны : ибо тогда должно бы извлекать квадратный корень изъ отрицательнаго числа ; но когда b менше нежели $\frac{1}{4}aa$, или еще менше 0 , то есть отрицательное, то обѣ величины x будутъ всегда возможны; и хотя бы они были возможны или нѣтъ , то всегда можно ихъ изъяснить по сему способу : припомъ имѣютъ они всегда сіе свойство , что сумма ихъ равна a , а произведеніе $= b$, какъ въ семъ примѣрѣ видно $xx - bx + 10 = 0$, гдѣ сумма обѣихъ знаменованій x должно быть b , а произведеніе $= 10$. Обѣ величины будутъ: I) $x = 3 + \sqrt{-1}$; II) $x = 3 - \sqrt{-1}$, коихъ сумма $= 6$, а произведеніе $= 10$.

Сей характеръ можно изъяснить вообще, припомъ можетъ быть онъ употребленъ и въ такихъ уравненіяхъ какъ $fx^2 + gx + b = 0$; ибо отсюда получится $xx = -\frac{g}{f}x - \frac{b}{f}$, и $x = -\frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{gg}{4f^2} - \frac{b}{f}\right)}$

или $x = \frac{-g \pm \sqrt{(gg - 4fb)}}{2f}$; откуда вид-

но, что обѣ величины для x могутъ быть мнимыя, или уравненіе не возможно, когда $4fb$ будетъ больше нежели gg , или когда въ семъ уравненіи $fx^2 + gx + b = 0$ учетверенное произведение изъ первого и послѣдняго члена будетъ больше, нежели квадратъ втораго члена; ибо четверное произведение изъ первого и послѣдняго членовъ есть $4fbxx$, квадратъ средняго члена есть $ggxx$, и когда $4fbxx$ больше нежели $ggxx$, то будетъ также $4fb$ больше нежели gg , слѣд. и уравненіе не возможно. Во всѣхъ другихъ случаяхъ уравненіе возможно, и обѣ величины для x дѣйствительно опредѣлять можно,

можно, хотя оныя часто бываютъ и неиз-
васкомы, однако въ тѣхъ случаяхъ къ
истинной величинѣ всегда приблизиться
можно, какъ уже выше сего упомянушо.
Напротивъ того въ мнимыхъ выраже-
нїяхъ какъ $V-5$ ни какое приближеніе
мѣста не имѣетъ, ибо тогда и 100 отъ
него столько же далеко отстоитъ какъ 1,
или другое какое число.

704.

При семъ еще примѣчать надле-
житъ, что каждая такая формула вто-
рой степени какъ $xx + ax + b$ непремѣн-
но раздѣлится можетъ на два такіе мно-
жителя, какъ $(x + p)(x + q)$. ибо ежели
бы кто хотѣлъ взять 3 такихъ множи-
теля, то нашелъ бы уравненіе третьей
степени, на противъ того изъ одного
такого множителя не дошелъ бы и до
второй степени; по чему безспорно
должно быть справедливо, что каждое
уравненіе второй степени содержитъ въ
себѣ двѣ величины для x , и что такихъ

Томъ II.

И

вели-

величинъ въ немъ ни больше, ни меньше быть не можетъ.

705.

Уже показано было, что когда оба сѣи множителя найдутся, то отсюда и обѣ величины для x опредѣлить можно будетъ; ибо каждаго множителя положивъ равна 0, найдется величина x . Сіе имѣетъ мѣсто и въ оборотномъ смыслѣ, то есть, какъ скоро одна величина x опредѣлена будетъ, познается отсюда и множитель квадратнаго уравненія; ибо когда $x = p$ есть одна величина для x въ квадратномъ уравненіи, то будетъ также $x - p$ одинъ множитель онаго, или когда всѣ члены перенесутся на одну сторону, уравненіе раздѣлится можетъ на $x - p$, и частное дастъ другаго множителя.

706.

Для изъясненія сего пусть будетъ данное уравненіе $xx + 4x - 21 = 0$, о которомъ мы знаемъ, что $x = 3$ есть величина

личина количества x , ибо $3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 21 = 0$, а отсюда заключить можемъ, что $x - 3$ есть множитель сего уравненія, или что $xx - 4x - 21$ раздѣлится можетъ на $x - 3$, какъ изъ слѣдующаго дѣленія видно:

$$\begin{array}{r} x-3 \overline{) xx-4x-21} \quad x+7 \\ \underline{xx-3x} \\ +7x-21 \\ \underline{+7x-21} \\ 0 \end{array}$$

И такъ другой множитель есть $x + 7$, и уравненіе наше можетъ изъявлено быть симъ произведеніемъ $(x - 3)(x + 7) = 0$, откуда обѣ величины количества x ясно видѣть можно; ибо изъ перваго множителя будетъ $-x = 3$, а изъ другаго $x = -7$.



ГЛАВА X.

О разрѣшеніи чистыхъ кубичныхъ уравненій.

707.

Чистое кубичное уравненіе называется, въ которомъ кубъ неизвѣстнаго количества полагается равенъ извѣстному числу, такъ что въ немъ ни квадратовъ неизвѣстнаго числа, ни оно само не попадается.

Такое уравненіе есть $x^3 = 125$. или вообще $x^3 = a$, или $x^3 = \frac{a}{b}$.

708.

Какимъ образомъ изъ такого уравненія величина x находится, явно само по себѣ : ибо нужно только съ обѣихъ сторонъ извлечь кубичной корень.

Такъ изъ уравненія $x^3 = 125$ найдется $x = 5$, изъ уравненія $x^3 = a$ будетъ $x = \sqrt[3]{a}$; а изъ $x^3 = \frac{a}{b}$ найдется $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. И такъ еслии кто знаетъ, какъ извѣстнаго

влекася кубичной корень изъ какого нибудь числа, тогда можетъ разрѣшить и такое уравненіе.

709.

Но симъ образомъ получится одна только величина x , между тѣмъ когда каждое квадратное уравненіе имѣетъ двѣ величины для x , по можно думать, что также и кубичное уравненіе должно имѣть больше нежели одну величину; слѣд. не безнужно будетъ разсмотрѣть сіе обстоятельство, и въ случаѣ, еслии такое уравненіе больше одной величины для x имѣть должно, какъ ихъ сыскать надлежитъ.

710.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе $x^3 = 8$, изъ коего всѣ числа найши должно, коихъ кубъ $= 8$, и послѣку безъ всякаго сомнѣнія такое число $x = 2$, то по прежней главѣ $x^3 - 8 = 0$ должно дѣлиться на $x - 2$, чего ради дѣлаемъ сіе дѣленіе:

И 3

$x - 2$

$$\begin{array}{r}
 x-2 \overline{) x^3 - 8 \mid x^2 + 2x - 4} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 + 2x^2 - 8 \\
 \underline{+ 2x^2 - 4x} \\
 + 4x - 8 \\
 \underline{+ 4x - 8}
 \end{array}$$

Слѣдовательно уравненіе наше $x^3 - 8 = 0$ извѣстнѣ можно множителами $(x-2)$ $(xx + 2x + 4) = 0$.

711.

Понеже здѣсь спрашивается, какое-бы число взявъ подлежало мѣсто x , чтобъ $x^3 = 8$ или $x^3 - 8 = 0$ было, то видно, что сіе учинится, когда въ прежнемъ пунктѣ найденное произведеніе положится 0; при томъ оно не только тогда будетъ 0, когда $x - 2 = 0$; откуда получится $x = 2$; но также и тогда, какъ другой множитель $xx + 2x + 4$ будетъ 0: чего ради положи ево $= 0$, то есть $xx + 2x + 4 = 0$, то будетъ $xx = -2x - 4$ и слѣд. $x = -1 \pm \sqrt{-3}$.

712.

712.

И такъ сверхъ $x=2$, въ кото-
ромъ случаѣ уравненіе $x^3=8$ разрѣшастъ
ся, имѣемъ мы еще двѣ другія величины
для x , коихъ кубы равнымъ образомъ
дѣлаютъ 8 , и которые суть такого со-
стоянія I) $x=1+\sqrt{-3}$; II) $x=-1$
 $-\sqrt{-3}$, а взявъ ихъ кубы сомнѣніе на-
ше кончится.

$ \begin{array}{r} -1 - 1 \sqrt{-3} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline 1 - \sqrt{-3} \\ - \sqrt{-3} - 3 \\ \hline -2 - 2\sqrt{-3} \quad \text{квадратъ} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline 2 + 2\sqrt{-3} \\ - 2\sqrt{-3} - 2 \cdot -3 \\ \hline 2 + 6 = 8 \quad \text{кубъ.} \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1 - \sqrt{-3} \\ -1 - \sqrt{-3} \\ \hline 1 + \sqrt{-3} \\ + \sqrt{-3} - 3 \\ \hline -2 + 2\sqrt{-3} \\ -1 - \sqrt{-3} \\ \hline 2 - 2\sqrt{-3} \\ + 2\sqrt{-3} - 2 \cdot -3 \\ \hline 2 + 6 = 8. \end{array} $
---	--

Объ сіи величины суть хотя и невозмо-
жные или мнимыя ; однако не смотря на
то примѣчанія достойны.

Сіе имѣстѣ мѣсто въ каждомъ пакѣ кубическомъ уравненіи, какъ $x^3 = a$, гдѣ сверхъ $x = \sqrt[3]{a}$ еще двѣ другія величины содержатся; положи для краткости $\sqrt[3]{a} = c$, такъ что $a = c^3$, и уравненіе наше получитъ сію формулу $x^3 = c^3$, или $x^3 - c^3 = 0$, которое послѣднее дѣлится на $x - c$, какъ изъ предложеннаго дѣленія видно:

$$\begin{array}{r}
 x \quad c \mid x^3 - c^3 \mid x^2 + cx + c^2 \\
 \underline{x^3 - cx^2} \\
 + cx^2 - c^3 \\
 \underline{+ cx^2 - c^2x} \\
 + c^2x - c^3 \\
 \underline{+ c^2x - c^3} \\
 0
 \end{array}$$

По чему предписанное уравненіе изъявится можетъ симъ произведеніемъ $(x - c)(x^2 + cx + c^2) = 0$, что въ самомъ дѣлѣ будетъ равно 0, не только тогда, когда $x - c = 0$, или $x = c$, но также и когда $xx + cx + c^2 = 0$, а изъ сего будетъ $xx = -cx - c^2$; и слѣд. $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - c^2} =$

$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a}}{2} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right) \sqrt[3]{a}$. с. въ сей формулѣ содержащя еще двѣ величины для x .

714.

После c вмѣсто $\sqrt[3]{a}$ написано было, то отсюда выводимъ мы слѣдствіе: что въ каждой кубичной формулѣ какъ $x^3 = a$ три величины для x содержащя, копоры изъвѣщаются такъ:

$$\text{I) } x = \sqrt[3]{a}, \quad \text{II) } x = \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right) \sqrt[3]{a}, \quad \text{III) } x = \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right) \sqrt[3]{a}.$$

Откуда явствуетъ, что каждой кубичной корень три величины имѣетъ, изъ коихъ хотя первая только возможна, прочіе же двѣ не возможны, копоры однако здѣсь примѣчать надлежитъ, для того что мы выше сего видѣли, что каждой квадратной корень двѣ величины имѣетъ; а въ слѣдующихъ покажется, что каждой корень четвертой степени имѣетъ 4 разныя величины, пятой пять и такъ далѣе.

Въ простыхъ выкладкахъ употребляется только первой изъ сихъ трехъ вели-

И 5

чинъ

чинѣ . потому что оба другіе не возможны ; чему намѣрены мы еще дать адѣсь нѣсколько примѣровъ.

715.

Вопросъ. Сыскать число , котораго квадратъ если умножится на $\frac{1}{4}$ числа искомаго , произошло бы 432 ?

Пусть сѣ число будетъ x , то xx умноженное на $\frac{1}{4}x$ должно быть равно числу 432 ; слѣдов. будетъ $\frac{1}{4}x^3 = 432$, умноживъ на 4, будетъ $x^3 = 1728$, и извлеки кубичной корень найдется $x = 12$

Отвѣтъ. Искомое число ссть 12; ибо квадратъ его 144 умноженной на $\frac{1}{4}$ т. е. на 3 даетъ 432.

716.

Вопросъ. Сыскать число , коего бы четвертая степень раздѣленная на его половину , и къ сему частному если придастся $14\frac{1}{2}$ чпобъ вышло 100 ?

Искомое число положи x , то четвертая его степень x^4 раздѣленная на $\frac{1}{2}x$ даетъ $2x^3$; къ сему придавъ $14\frac{1}{2}$ должно

жно вычти 100 , и такъ будетъ $2x^2 + 14\frac{1}{2} = 100$, вычти $14\frac{1}{2}$, выдетъ $2x^2 = \frac{143}{2}$, раздѣли на 2 , выдетъ $x^2 = \frac{143}{4}$, и извлеки кубичной корень получится $x = \frac{7}{2}$.

717.

Вопросъ. Нѣсколько офицеровъ стоятъ въ полѣ , каждой въ командѣ своей имѣетъ въ прое столько конницы , и въ 20 разъ столько пѣхоты , нежели сколько всѣхъ офицеровъ въ полѣ находится ; каждой конной получаетъ въ мѣсяцъ столько гуldenовъ жалованья , сколько всѣхъ офицеровъ ; а каждой пѣшей въ половину столько . вся же въ мѣсяцахъ выдаваемая на жалованье сумма денегъ дѣлаетъ 13000 гуlden. спрашивается сколько всѣхъ офицеровъ было ?

Положи число офицеровъ x , то каждой въ командѣ своей имѣетъ $3x$ конницы и $20x$ пѣхоты , слѣд. число всѣхъ конныхъ было $3xx$, а пѣшихъ $20xx$; и когда каждой конной въ мѣсяцъ получаетъ x гуldenовъ , и каждой пѣшей $\frac{1}{2}x$ гулд.

гулд. по мѣсячное жалованье всѣхъ конныхъ будетъ $3x^2$ гулденовъ, а пѣхоны $10x^2$ гулд. и всѣ вообще получаютъ снѣ $13x^2$ гулденовъ, что должно быть равно числу 13000 гулд.

И такъ когда $13x^2 = 13000$, то будетъ $x^2 = 1000$ и $x = 10$. Столько было офицеровъ.

718.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ здѣлали компанію. Положивъ каждой въ 100 разъ больше, нежели ихъ число компанію составляющее, съ ссю суммою посылаютъ они фактора въ Венецію, которой на каждые 100 флореновъ выигравъ въ двое больше, нежели число ихъ; а возвратившись назадъ привезъ барыша 2662 флор. спрашивается сколько купцовъ было?

Пусть будетъ x число купцовъ, то каждой изъ нихъ положилъ 100 x флор. и весь капиталъ былъ 100 x^2 флор; и когда на каждыя 100 флор. получено барыша 2 x флор., то весь выигрышъ

рышѣ былъ $2x^2$ флор., что должно быть равно 2662 флор. слѣд. $2x^2 = 2662$ и $x^2 = 1331$, откуда $x = 11$. Столько было купцовъ.

719.

Вопросъ. Одна крестьянка промѣниваетъ сырѣ на курицѣ, давая 2 сыра за каждые 3 курицы: куры несутъ яйца, кладя $\frac{1}{3}$ пропиву числа всѣхъ куръ. Съ этими яйцами пошла она на рынокъ, и продаетъ каждые 9 яицъ за столько пфенинговъ сколько курица снесла яицъ, а выручила всѣхъ денегъ 72 пфенинга; спрашивается сколько сыровъ у нее было?

Положи число сыровъ было x , что промѣняла она ихъ за $\frac{3}{2}x$ курицы, когда каждая курица кладетъ $\frac{1}{3}x$ яицъ, то число всѣхъ яицъ было $\frac{1}{3}xx$: теперь продаетъ она каждые 9 яицъ за $\frac{1}{3}x$ пфенинговъ; слѣд. всего навсе выручила она $\frac{1}{4}x^3$ пфен., что 72 равно быть долженствуемъ. И такъ $\frac{1}{4}x^3 = 72$, и $x^3 = 72 \cdot 4 = 8 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 = 8 \cdot 8 \cdot 27$, почему $x = 12$. Столько сыровъ у крестьянки было, кои она промѣняла за 18 курицъ.

ГЛАВА



ГЛАВА XI.

О разрѣшеніи полныхъ кубическихъ уравненій.

720.

Полное кубическое уравненіе называется, въ которомъ сверхъ куба неизвѣстнаго числа, еще его квадратъ и самое неизвѣстное число находится. Общая формула такого уравненія есть $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то есть когда всѣ члены перенесутся на одну сторону. А какимъ образомъ изъ такого уравненія величины x находятся, которые также и корни уравненія именуются, показано будетъ въ сей главѣ; ибо здѣсь можно уже знать напередъ, что такое уравненіе всегда 3 корня имѣетъ, по причинѣ въ прежней главѣ о чистыхъ уравненіяхъ сего степени показанной.

721.

Съ самаго начала рассмотримъ сіе уравненіе $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; когда
квадратъ;

квадратное уравненіе почитается за произведеніе изъ двухъ множителей, то сіе кубическое можно почесть за произведеніе изъ трехъ множителей, которые въ семъ случаѣ будутъ:

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$, кои умножены будучи между собою производятъ преж-
нее уравненіе; ибо $(x-1)(x-2)=xx-3x+2$, и сіе умножа еще на $(x-3)$, въ произведеніи дастъ $x^3-6xx+11x-6$ прежнее заданное уравненіе, которое равно 0 быть должно; что учинится когда произведеніе $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ будетъ; а сіе здѣлается ежели только одинъ изъ трехъ множителей будетъ 0; и слѣд. въ трехъ случаяхъ; первое, когда $x-1=0$, или $x=1$, второе, когда $x-2=0$, или $x=2$, третье, когда $x-3=0$, или $x=3$. Сверхъ сего видно, что какое бы другое число мѣсто x положено ни было, ни одинъ изъ сихъ трехъ множителей не будетъ 0, слѣд. также и произведеніе; откуда видно, что уравне-

уравненіе наше никакихъ другихъ корней не имѣетъ кромѣ сихъ трехъ.

722.

Если бы можно было къ каждому другому случаю опредѣлить сихъ трехъ множителей уравненія, то бы изъ ихъ нашлись тотчасъ три корня онаго. На сей конецъ рассмотримъ мы три такіе множителя вообще, кои пусть будутъ $x - p$, $x - q$, $x - r$: найди ихъ произведеніе, и поелику первой умноженной на втораго дастъ $xx - (p + q)x + pq$, то сіе произведеніе умноженное на $x - r$ произведетъ слѣдующую формулу:

$x^3 - (p + q + r)xx + (pq + pr + qr)x - pqr$, которая если должна быть 0, то сіе учинится только въ трехъ случаяхъ: I) $x - p = 0$ или $x = p$, II) $x - q = 0$, или $x = q$; III) $x - r = 0$ или $x = r$.

723.

Пусть сіе уравненіе теперь изобразится такъ: $x^3 - axx + bx - c = 0$, и елики корни

корни онаго будутъ I) $x = p$, II) $x = q$; III) $x = r$, то должно быть $a = p + q + r$, 2) $b = pq + pr + qr$; и 3) $c = pqr$, откуда видно, что второй членъ содержитъ сумму всѣхъ трехъ корней, третьей членъ сумму произведений каждаго двухъ корней помноженныхъ между собою, и послѣдней членъ произведение всѣхъ трехъ корней умноженныхъ между собою. Сіе послѣднее свойство показываетъ намъ, что кубическое уравненіе подлинно никакого другаго раціональнаго корня имѣть не можетъ, какъ только того, на котораго послѣдней членъ дѣлится; ибо когда онъ есть произведение изъ всѣхъ трехъ корней, то долженъ онъ непременно дѣлиться на каждаго изъ нихъ. И такъ тотчасъ узнать можно, какими числами помянутое дѣленіе прѣбывать должно, ежели пожелаешь узнать одинъ только корень.

Для извѣщенія сего рассмотримъ мы уравненіе $x^3 = x + b$ или $x^3 - x - b = 0$, когда оно никакого другаго раціональ-

Толѣ II.

I

наго

наго корня не имѣетъ, кромѣ того, на которой послѣдней членъ 6 дѣлится, то пробу чинить надлежитъ съ сими только числами 1, 2, 3, 6

которыя пробы сполнѣ въ такомъ порядкѣ

$$\text{I) когда } x=1, \text{ то будетъ } 1-1-6=-6$$

$$\text{II) когда } x=2, \text{ то будетъ } 8-2-6=0$$

$$\text{III) когда } x=3, \text{ то будетъ } 27-3-6=18$$

$$\text{IV) когда } x=6, \text{ то будетъ } 216-6-6=204$$

Отсюда усматриваемъ мы, что $x=2$ есть корень предложеннаго уравненія, изъ коего уже оба другіе легко найти можно; ибо когда $x=2$ есть корень, то $x-2$ будетъ множитель уравненія; чего ради надлежитъ только сыскать другаго множителя, что учинится слѣдующимъ дѣленіемъ:

$$\begin{array}{r}
 x-2 \left| \begin{array}{l} x^2-x-6 \\ x^2-2x^2 \end{array} \right| x^2+2x+3 \\
 \hline
 2x^2-x \\
 2x^2-4x \\
 \hline
 +3x-6 \\
 +3x-6 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Понеже формула наша извѣдена
 быть можеть симъ произведеніемъ $(x-2)$
 (x^2+2x+3) , то она будеть 0, не-
 только когда $x-2=0$; но и когда xx
 $+2x+3=0$, а отсюда имѣемъ мы xx
 $=-2x-3$, то есть $x=-1 \pm \sqrt{-2}$
 оба другіе корня нашего уравненія, кои
 какъ видно суть не возможныхъ, или
 мнимыхъ.

724-

Но сіе имѣетъ тогда только мѣ-
 сто, когда первой членъ уравненія x^2
 на 1, а прочіе члены на цѣлыя числа
 помножены; ссплы же въ данномъ ура-
 вненіи случается дроби, то имѣемъ мы
 средство превращать сіе уравненіе въ
 другое, въ коемъ дробей не находится,

I 2

21

и тогда проба учинена съ нимъ быть можеть какъ и прежде.

Пусть будетъ дано уравненіе $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$, понеже здѣсь четверти находятся, то положи $x = \frac{y}{2}$, и получится $\frac{y^3}{8} - \frac{3y^2}{4} + \frac{11y}{4} - \frac{3}{4} = 0$, что помноживъ на 8 будетъ $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, коего корни суть, какъ мы прежде уже видѣли $y = 1, y = 2, y = 3$; слѣд. въ нашемъ уравненіи I) $x = \frac{1}{2}$; II) $x = 1$; III) $x = \frac{3}{2}$.

725.

Когда первой членъ въ уравненіи умноженъ будетъ на какое нибудь число, а послѣдней будетъ 1, какъ въ семъ уравненіи $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, откуда чрезъ дѣленіе на 6 произойдетъ $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$, которое по прежнему правилу отъ дробей освободится, положивъ $x = \frac{y}{6}$; ибо тогда выйдетъ $\frac{y^3}{216} - \frac{11y^2}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, что умноживъ на 216 выйдетъ $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$; но здѣсь сразу бы было дѣлать пробу со всѣми дѣлителями числа 36, а понеже въ первомъ ура-

уравненіи послѣдней членъ $= 1$, то положи $x = \frac{1}{z}$ и будетъ $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, что умноживъ на z^3 произойдетъ $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ и перенеся всѣ члены на другую сторону будетъ $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$, коего корни суть $z = 1 = 2 = 3$; слѣд. въ нашемъ уравненіи будетъ $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

726.

Изъ вышепоказаннаго явствуетъ, что, когда всѣ корни будутъ положительныя, знаки $+$ и $-$ въ уравненіи переменяются, и тогда имѣетъ оно такой видъ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, гдѣ при переменѣ знаковъ находятся, то есть, столько же сколько оно имѣетъ положительныхъ корней. Если же бы были всѣ три корня отрицательныя, и помножены были между собою сіи три множителя $x + p$, $x + q$, $x + r$, то при всѣхъ бы членахъ находился знакъ $+$; а уравненіе такую бы формулу имѣло $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, гдѣ 3 раза 2 одинакіе знака другъ за другомъ слѣдуютъ, то есть

I I

столь-

столько же , сколько уравненіе имѣетъ отрицательныхъ корней.

Изъ сего выведено сіе слѣдствіе , сколь часто въ уравненіи знаки перемѣняются , столько положительныхъ корней оно имѣетъ, и сколь часто одинакіе знаки другъ за другомъ слѣдуютъ, столько оно отрицательныхъ корней имѣетъ. Сіе примѣчаніе здѣсь весьма важно , дабы познать , положительныя или отрицательныя дѣлители послѣдняго члена , съ которыми проба дѣлается , брать должно.

727.

Для изъясненія сего рассмотримъ сіе уравненіе :

$x^5 + xx - 34x + 56 = 0$, въ которомъ двѣ перемѣны знаковъ , и одно только слѣдствіе того же знака находится, откуда мы заключаемъ , что сіе уравненіе имѣетъ два положительныхъ , и одинъ отрицательный корень , кои должны быть дѣлителями послѣдняго члена 56 , и
слѣд.

слѣд. содержатся между числами $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$.

Ежели положится $x=2$, то будетъ $8+4-68+56=0$, откуда видимъ, что $x=2$ есть корень положительной, и слѣд. $x-2$ дѣлится нашего уравненія, откуда оба прочіе корня легко найти можно, ежели только уравнение раздѣлится на $x-2$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-2 \overline{) \begin{array}{l} x^3 + 3x^2 - 34x + 56 \\ x^3 - 2x^2 \end{array} } \quad \begin{array}{l} x^2 + 3x - 28 \\ x^2 + 3x - 28 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l} 3x^2 - 34x \\ 3x^2 - 6x \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l} -28x + 56 \\ -28x + 56 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

И такъ сіе частное $x^2 + 3x - 28=0$ положивъ, найдутся отсюда оба другіе корня, кои будутъ $x=-\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$, слѣд. оба послѣдніе корня будутъ $x=4$ и $x=-7$, къ чему еще надлежитъ взять прежней $x=2$.

Отсюда явствуетъ, что въ заданномъ уравненіи дѣйствительно два положительных и одинъ отрицательной корни содержатся, что слѣдующими примѣрами изъяснить мы намѣрены.

728.

Вопросъ. Сыскать два числа, коихъ разность 12, и ежели произведеніе ихъ помножится на ихъ сумму, тобъ вышло 14560.

Положивъ меньшее число x , большее будетъ $x+12$, произведеніе ихъ $xx+12x$, которос умножено будучи на $2x+12$ дастъ $2x^2+36xx+144x=14560$, раздѣливъ на 2, будетъ $x^2+18xx+72x=7280$.

Понеже послѣдней членъ 7280 такъ великъ, что пробы съ нимъ мы учинить не можемъ, но видя что онъ дѣлится на 8, положи $x=2y$ и выдетъ $8y^2+72yy+144y=7280$; сіе уравненіе раздѣливъ на 8 выдетъ $y^2+9yy+18y=910$, и теперь можно учинить пробу съ дѣлящими

лями числа 910, кошорые суть 1, 2, 5, 7, 10, 13 и проч. числа 1, 2, 5 суть дѣйствишельно малы, для того возми $y=7$ и получится $343+441+126$ точно $=910$, слѣд. одинъ корень $y=7$ и $x=14$, а еслии кто хочетъ знать и оба прочіе корня, то раздѣли $y^3+9y^2+18y-910$ на $y-7$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 y-7 \overline{) y^3+9y^2+18y-910} \quad | y^2+16y+130 \\
 \underline{y^3-7y^2} \\
 +16y^2+18y \\
 \underline{+16y^2-112y} \\
 130y-910 \\
 \underline{130y-910} \\
 0
 \end{array}$$

Если положится сіе частное $y^2+16y+130=0$, то будетъ $yy=-16y-130$, откуда $y=-8 \pm \sqrt{-66}$, то есть оба прочіе корня суть невозможны.

Отвѣтъ. Оба искомья числа будутъ 14 и 26, коихъ произведеніе 364 умноженное на ихъ сумму 40 даетъ 14560.

Вопросъ. Найти два числа , коихъ разность 18 и разность ихъ кубовъ умноженная на сумму чиселъ производитъ число 275184 ?

Меншее число пусть будетъ x , а большее $x+18$, кубъ меншаго x^3 , большаго $x^3+54xx+972x+5832$ разность ихъ $=54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$ которая умножена будучи на сумму чиселъ $2x+18=2(x+9)$ въ произведеніи дастъ $108(x^2+27xx+270x+972)=275184$, раздѣли на 108 получится $x^2+27xx+270x+972=2548$, или $x^2+27xx+270x=1576$. Дѣлители числа 1576 суть 1, 2, 4, 8 и проч. изъ коихъ 1 и 2 малы, когда же положится 4 мѣсто x , то уравненіе разрѣшится, а для снисканія обѣихъ прочихъ корней должно уравненіе раздѣлить на $x-4$ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-4 \overline{) x^3 + 27xx + 270x - 1576} \quad | \quad x^2 + 31x + 394 \\
 \underline{x^3 - 4xx} \\
 31xx + 270x \\
 \underline{31xx - 124} \\
 394x - 1576 \\
 \underline{394x - 1576} \\
 0
 \end{array}$$

Изъ сего частнаго получится $xx = -31x - 394$, а отсюда $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$, которые оба суть невозможны.

Отвѣтъ. Искомыя числа суть 4 и 22.

730.

Вопросъ. Найди два числа, коихъ разность 720, и если квадратной корень изъ большаго числа умножится на меньшее, то бы вышло 20736?

Меньшее число пусть будетъ x , а большее $x+720$ и $x\sqrt{x+720} = 20736 = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 81$; возми теперь съ обѣихъ сторонъ квадраты, то будетъ $x^2(x+720) = x^3 + 720xx = 8^3 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, положи $x = 8y$, то выйдетъ $8^3y^3 + 8^3 \cdot 720 \cdot y = 8^3 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$

$4^2 \cdot 81^2$, раздѣли на 8^2 , будетъ $y^2 + 90y = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, положи $y = 2z$, выдетъ $8z^2 + 4 \cdot 90zz = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, раздѣли на 8, будетъ $z^2 + 45zz = 4^2 \cdot 81^2$; положи $z = 9u$, выдетъ $9^2 u^2 + 45 \cdot 9^2 uu = 4^2 \cdot 9^2$

раздѣли на 9^2 будетъ $u^2 + 5uu = 4^2 \cdot 9$ или $uu(u+5) = 16 \cdot 9 = 144$. Здѣсь видно, что $u = 4$; ибо тогда $uu = 16$, и $u + 5 = 9$, откуда $z = 36$, $y = 72$, и $x = 576$, которое есть меньшее число, большее же $= 1296$, коего квадратной корень 36 умноженной на 576 дастъ число 20736.

731.

Примѣчаніе. Сей вопросъ способѣ разрѣшиться можетъ симъ образомъ. Поже большее число должно быть квадратъ, въ противномъ случаѣ корень его умноженной на меньшее число не произвелъ бы заданнаго числа.

Пусть будетъ большее число xx , а меньшее $xx - 720$, которое на квадратной корень большаго числа, т. е. на x умно-

умноженное дастъ $x^3 - 720x = 20736 = 64$.
 27. 12, положи $x = 4y$, то будетъ $64y^3 - 720$. $4y = 64$. 27. 12, раздѣли на 64, вы-
 деть $y^3 - 45y = 27. 12$, положи еще $y = 3z$,
 и будетъ $27z^3 - 135z = 27. 12$, раздѣли на
 27, выдетъ $z^3 - 5z = 12$, или $z^3 - 5z - 12$
 $= 0$. Дѣлишеля 12 ни суть 1, 2, 3, 4, 6,
 12, изъ коихъ 1 и 2 очень малы, а
 когда положится $z = 3$, то выдетъ 27
 $- 15 - 12 = 0$, слѣд. $z = 3$, $y = 9$ и $x = 36$,
 и такъ большее число $xx = 1296$, а мен-
 шее $xx - 720 = 576$, какъ и прежде.

732.

Вопросъ. Найди два числа, кото-
 рыхъ разность $= 12$, и когда разность
 сія помножится на сумму ихъ кубовъ,
 тобъ вышло 102144?

Положивъ меньшее число x , большее
 будетъ $x + 12$, кубъ перваго $= x^3$, а
 другаго $x^3 + 36xx + 432x + 1728$, сум-
 ма ихъ умноженная на 12 дастъ 12
 $(2x^3 + 36xx + 432x + 1728) = 102144$,
 раздѣли на 12, выдетъ $2x^3 + 36xx$
 $+ 432x$

158 ОБЪ АЛГЕБРАИЧЕСК. УРАВНЕНИЯХ.

$+432x + 1728 = 8512$ раздѣли на 2 вы-
детъ $x^3 + 18xx + 216x + 864 = 4256$.

или $x^3 + 18xx + 216x = 3392 = 8.8.$

53. Положи $x = 2y$ и раздѣли на 8 ,
будетъ , $y^3 + 9yy + 54y = 8.53 = 424$. Дѣ-
лители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 8,
53 и проч. изъ коихъ 1 и 2 очень
малы , если же положится $y = 4$, то
будетъ $64 + 144 + 216 = 424$, слѣд. $y = 4$
и $x = 8$, по чему оба искомыя числа суть
8 и 20.

733.

Вопросъ. Въ нѣкоторой купеческой
компаніи кладетъ каждой въ 10 разъ
столько флореновъ , сколько людей въ
компаніи ; получаютъ на каждые 100
флор. барыша 6 флор. больше , нежели
ихъ число , на послѣдокъ нашлось , что
весь барышъ былъ 392 флор. спрашивается
сколько товарищей было ?

Положи число товарищей было x ,
то каждой въ компанію положилъ $10x$
флореновъ, а всѣ вмѣстѣ положили $10xx$
флор. ; на каждые 100 флореновъ изъ
сѣй

сей суммы выигрываютъ они 6 флореновъ больше, нежели сколько ихъ въ компаніи находится; слѣд. на 100 флор. получаютъ барыша $x + 6$ флор. и на весь ихъ капиталъ получаютъ они $\frac{x^2 + 6xx}{10} = 392$

Умножь на 10, и выйдетъ $x^2 + 6xx = 3920$, положи $x = 2y$, то получится $8y^2 + 24yy = 3920$ раздѣливъ на 8 выйдетъ $y^2 + 3yy = 490$. Дѣлилися послѣдняго члена суть 1, 2, 5, 7, 10 и проч. изъ коихъ 1, 2 и 5 очень малы, когда же положится $y = 7$, то выйдетъ $343 + 147 = 490$, слѣд. $y = 7$ и $x = 14$.

Отвѣтъ. Число товарищей было 14, и каждой положилъ 140 флореновъ.

734.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ имѣютъ вмѣстѣ капиталъ изъ 8240 палеровъ состоящей, въ которую сумму каждой положилъ еще въ 40 разъ больше палеровъ, нежели число товарищей; всю суммою выигрываютъ они столько процен-

процентовъ сколько товарищей было ; попомъ раздѣливъ сей выигрышъ взявъ каждой 10 разъ столько талеровъ, сколько велико ихъ число было, и наконецъ осталось еще 224 талера, спрашивается сколько всѣхъ купцовъ было ?

Положи число ихъ $=x$, то каждой изъ нихъ кладетъ $40x$ талеровъ къ общему капиталу 8240 тал. слѣд. всѣ вмѣстѣ положатъ $40xx$ талер. ; по чему вся сумма была $40xx + 8240$, которою выигрываютъ они на каждыя 100 талер. x талер. слѣд. весь выигрышъ будетъ $\frac{40x^2}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4x^2}{5} + \frac{824x}{10}$; изъ сего числа беретъ каждой 10х талер слѣд. всѣ вмѣстѣ возмуть $10xx$ талер. и останется еще 224 талер., откуда явствуетъ что весь выигрышъ былъ $10xx + 224$, чего ради получимъ мы уравненіе $\frac{4x^2}{5} + \frac{824x}{10} = 10xx + 224$, которое раздѣливъ на 2 и помноживъ на 5 выдемъ $x^2 + 206x = 25xx + 560$ или $x^2 - 25xx + 206x - 560 = 0$. Чтожъ касается до пробы , то первая формула гораздо къ тому способнѣе.

Понже

Понеже дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, и пр., которые должны быть положительныя числа, потому, что въ послѣднемъ уравненіи находится 3 переменны знаковъ; а опшуда заключить можно что всѣ три корня должны быть положительные.

Ежели проба учинится съ числами $x=1$ и $x=2$, то явно, что первая часть будетъ гораздо меньше, нежели вторая; чего ради станемъ пробовать слѣдующія числа:

когда $x=4$, то будетъ $64+824=400$
 $+560$ несходно;

когда $x=5$, то будетъ $125+1030=625$
 $+560$ несходно;

когда $x=7$, то будетъ $343+1442=1225$
 $+560$ сходно, слѣд. $x=7$ есть корень нашего уравненія; а что бы сыскать и другіе два, то раздѣли послѣднюю формулу на $x-7$ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-7) x^3-25xx+206x-560) x^2-18x+80 \\
 \underline{x^2-7xx} \\
 -18xx+206x \\
 \underline{-18xx+126x} \\
 +80x-560 \\
 \underline{80x-560}
 \end{array}$$

Сіе найденное частное положи $=0$, и будетъ $xx-18x+80=0$, или $xx=18x-80$, откуда $x=9 \pm 1$, по чему другіе оба корня суть $x=8$ и $x=10$.

Отвѣтъ. На сей вопросъ найдены 3 отвѣта: по первому рѣшенію число купцовъ было 7; по второму 8; а по третьему 10, какъ всѣхъ ихъ трехъ совокупленная здѣсь проба показываетъ

число купцовъ	I 7	II 8	III 10
каждой кладетъ 40х	280	320	400
всѣ вмѣстѣ кладутъ			
40хх —	1960	2560	4000
старой капиталъ	8240	8240	8240
весь капиталъ } 40хх + 8240 }	10200	10800	12240
симъ выиграно } столько процентовъ }	714	864	1224
сколько товарищей }			
изъсего каждой бе- } ретъ 10х — }	70	80	100
всѣ взяли 10хх —	490	640	1000
и такъ еще останет.	224	224	224



ГЛАВА XII.

О правилѣ Кардана, или Сципіона Феррея.

735.

Если какое нибудь кубическое уравненіе приведено будетъ въ цѣлыя числа, какъ уже выше сего показано, и ни одинъ дѣлитель послѣдняго члена корнемъ уравненія быть не можетъ, то сіе значить, что уравненіе не имѣетъ ни какого корня ни въ цѣлыхъ числахъ, ни въ дробяхъ, что можетъ быть показано такъ:

Пусть будетъ уравненіе $x^3 - axx + bx - c = 0$; гдѣ a , b и c суть цѣлыя числа, и гдѣ ни одна дробь величиною x быть не можетъ; ибо еслибы было положено было $x = \frac{p}{q}$, то вышлобы $\frac{p^3}{q^3} - \frac{a}{q} \frac{p^2}{q} + \frac{b}{q} \frac{p}{q} - c = 0$; здѣсь имѣетъ только первой членъ знаменателя 8, прочіе же раздѣлены только на 4 и 2, или суть цѣлыя числа, кои слѣд. съ первымъ не могутъ быть

= 0,

—о, что должно думать и о всѣхъ пропущенныхъ дробяхъ.

736.

По елику въ сихъ случаяхъ корни уравненія ни цѣлыя числа, ни дроби быть не могутъ, то должны они быть неизвлекаемые, также и невозможные. Какимъ образомъ ихъ извѣдывать надлежитъ и что за знаки коренные въ такомъ уравненіи случаются, есть дѣло великой важности, коихъ изобрѣтеніе уже за нѣсколько сотъ лѣтъ приписано было Кардану, или наипаче Сципіону Феррею, что здѣсь обстоятельно извѣстнѣе надобно.

737.

На сей конецъ надлежитъ здѣсь обстоятельнѣе разсмотрѣть натуру куба, коего корень состоитъ изъ двухъ частей. Такъ пусть будетъ корень $a + b$, то кубъ его $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, которой состоитъ изъ кубовъ каждой части, и сверхъ того имѣетъ еще два средніе члена, то есть, $3aab + 3abb$, которые

К 3

оба

оба имѣютъ множителемъ $3ab$, другой же множитель есть $a + b$; ибо $3ab$ умноженные на $a + b$, даютъ $3aab + 3abb$, по чему сии два члена содержатъ упрощенное произведеніе обѣихъ частей a и b на сумму ихъ помноженное,

738.

Положи $x = a + b$, и возми съ обѣихъ сторонъ кубы, будетъ $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, и когда $a + b = x$, то получится сие кубическое уравненіе $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$, или $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$, о которомъ мы знаемъ, что одинъ его корень есть $x = a + b$; слѣд. когда бы такое уравненіе ни случилось, корень его означить мы можемъ.

Пусть будетъ напр. $a = 2$ и $b = 3$, то выходитъ уравненіе $x^3 = 18x + 35$, въ коемъ мы заподлинно знаемъ, что $x = 5$ есть его корень.

739.

Положи еще $a^3 = p$ и $b^3 = q$, то будетъ $a = \sqrt[3]{p}$ и $b = \sqrt[3]{q}$, слѣд. $ab = \sqrt[3]{pq}$;

и такъ когда случится уравненіе $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$, коего одинъ корень есть $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = x$; но p и q всегда можно опредѣлить такъ, что какъ 3 раза $\sqrt[3]{pq}$, такъ и $p + q$ будутъ всегда равны даннымъ числамъ, и чрезъ то мы приводимъ въ состояніе разрѣшать каждое такого роду кубическое уравненіе.

740.

Чего ради пусть дано будетъ сіе общее кубическое уравненіе $x^3 = fx + g$; въ семъ случаѣ f должно сравнивать съ $3\sqrt[3]{pq}$, а g съ $p + q$, или p и q , такъ опредѣлить надлежитъ чтобъ $3\sqrt[3]{pq}$ числу f , а $p + q$ числу g равны были, и тогда узнаемъ мы, что корень уравненія нашего будетъ $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

741.

Слѣдовательно надлежитъ разрѣшить сіи два уравненія I) $3\sqrt[3]{pq} = f$; II) $p + q = g$. Изъ перваго получится $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ а $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ и $4pq = \frac{4}{27}f^3$; изъ другаго уравненія взявъ его квадраты выдѣлимъ $pp + 2pq + qq = gg$, откуда выпи-

К 4

4pq

$4pq = \sqrt[3]{f^3}$, выдѣлѣ $pp - 2pq + qq = gg - \sqrt[3]{f^3}$,
 извлеки квадратной корень, и будетъ
 $p - q = \sqrt{gg - \sqrt[3]{f^3}}$ и полагая $p + q = g$, то
 будетъ $2p = g + \sqrt{gg - \sqrt[3]{f^3}}$, $2q = g - \sqrt{gg - \sqrt[3]{f^3}}$
 отсюда получаемъ мы $p = g \frac{+ \sqrt{gg - \sqrt[3]{f^3}}}{2}$
 и $q = g \frac{- \sqrt{gg - \sqrt[3]{f^3}}}{2}$

742.

И такъ если случится кубическое
 уравненіе $x^3 = fx + g$, какія бы числа f
 и g ни были, то корень его всегда бу-
 детъ $x = \sqrt[3]{g + \frac{\sqrt{gg - \sqrt[3]{f^3}}}{2}} + \sqrt[3]{g - \frac{\sqrt{gg - \sqrt[3]{f^3}}}{2}}$

откуда явствуетъ, что сія неизвлека-
 мость содержи́тъ въ себѣ не только
 знакъ квадратнаго корня, но также и
 кубическаго; и сія формула есть самое
 то, что обыкновенно Кардановымъ пра-
 виломъ называется.

743.

Сію формулу изъяснимъ нѣсколь-
 кими примѣрами.

Пусть

Пусть будетъ $x^3 = 6x + 9$, то видно что $f = 6$, $g = 9$, $gg = 81$, $f^3 = 216$, $\sqrt[4]{f^3} = 32$, слѣд. $gg - \sqrt[4]{f^3} = 49$, и квадратной корень изъ $gg - \sqrt[4]{f^3} = 7$; и такъ предложеннаго уравненія корень $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, то есть, $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$, или $x = 2 + 1 = 3$.

744.

Пусть еще дано будетъ уравненіе $x^3 = 3x + 2$, то будетъ $f = 3$, $g = 2$, $gg = 4$, $f^3 = 27$, $\sqrt[4]{f^3} = 4$ слѣд. квадратной корень изъ $gg - \sqrt[4]{f^3} = 0$, по чему корень будетъ $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}}$ $x = 1 + 1 = 2$.

745.

Но шакое уравненіе имѣетъ хотя и рациональной корень, однакожь часто случается, что его по сему правилу найти не можно, хотя помянутой корень въ немъ и содержится.

Пусть дано будетъ уравненіе $x^3 = 6x + 40$, гдѣ корень $x = 4$. Здѣсь $f = 6$, $g = 40$, $gg = 1600$ и $\sqrt[4]{f^3} = 32$; слѣд.

К 5

gg

$gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$ и $\sqrt[3]{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt[3]{1568} = \sqrt[3]{4 \cdot 49 \cdot 28} = 28\sqrt[3]{2}$; по чему корень $x = \sqrt[3]{\frac{40 + 2\sqrt[3]{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 2\sqrt[3]{2}}{2}}$, или $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt[3]{2}}$ которая формула дѣйстви- тельно равна 4, хотя сего и не видно; ибо когда кубъ $2 + \sqrt[3]{2}$ есть $20 + 14\sqrt[3]{2}$, то об- ратно корень кубичной изъ $20 + 14\sqrt[3]{2}$ есть $2 + \sqrt[3]{2}$; и такимъ же точно образомъ $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt[3]{2}} = 2 - \sqrt[3]{2}$, откуда корень нашъ $x = 2 + \sqrt[3]{2} + 2 - \sqrt[3]{2} = 4$.

746.

Можно сказать проптиву сего пра- вила , что сго не во всѣхъ кубичныхъ уравненіяхъ употреблять можно , пото- му что въ немъ квадрата x не находи- ся , или для того, что въ немъ не до- стаетъ втораго члена. Въ семъ случаѣ знать надлежитъ , что каждое полное уравненіе всегда можно превратить въ другое , въ которомъ втораго члена не находится , и слѣдовательно тогда сіе правило употребить можно будетъ. Для изъясненія сего пусть дано будетъ пол- ное

ное кубическое уравненіе $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; здѣсь берется третья часть числа при второмъ членѣ находящагося , и полагается $x = y + 2$, откуда $x = y + 2$; прочая выкладка будетъ слѣдующая :

$$\text{положивъ } x = y + 2, \quad xx = yy + 4y + 4, \\ x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8,$$

$$\begin{array}{r} \text{будешъ } x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ - 6xx = - 6yy - 24y - 24 \\ + 11x = + 11y + 22 \\ - 6 = - 6 \\ \hline 0 = y^3 - y \end{array}$$

Откуда получаемъ мы уравненіе $y^3 - y = 0$, коего рѣшеніе легко видѣть можно ; ибо разрѣшивъ его на множителей будетъ $y(y - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0$, и ежели каждой множитель положится $= 0$, то получится

$$\begin{array}{lll} \text{I} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2 \end{array} \right. & \text{II} \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1 \end{array} \right. & \text{III} \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 3, \end{array} \right. \end{array}$$

КОН

кои суть при уже выше сего найденные корни.

747.

Пусть теперь дано будетъ сіе общее кубическое уравненіе $x^3 + axx + bx + c = 0$, изъ коего выключимъ надлежащій второй членъ.

На сей конецъ приложи къ x третью часть числа при второмъ членѣ находящагося и съ его знакомъ; а мѣсто того напиши другую букву, напр. y , по по сему правилу получимъ мы $x + \frac{1}{3}a = y$, и $x = y - \frac{1}{3}a$, откуда производимъ слѣдующая выкладка:

$$x = y - \frac{1}{3}a ; \quad xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa ; \quad x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{2}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$$

$$\text{слѣдов. будетъ } x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{2}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$$

$$+ axx = + ay^2 - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^2$$

$$+ bx = + by - \frac{1}{3}ab$$

$$+ c = + c$$

$$y^3 - \frac{1}{3}aay + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0$$

$$+ by$$

И такъ

И такъ мѣсто прежняго уравненія выдетъ сіе , въ которомъ втораго члена не имѣется.

748.

Теперь можно Карданово правило употребить также и въ семъ случаѣ; ибо прежде сего имѣли мы уравненіе $x^3 = fx + g$, или $x^3 - fx - g = 0$, то въ нашемъ примѣрѣ будемъ $f = \frac{1}{3}aa - b$, и $g = -\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$, и изъ сихъ вмѣсто буквъ f и g найденныхъ величинъ получимъ какъ и прежде

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}}$$

и ежели такимъ образомъ найдется y , то въ данномъ уравненіи будемъ мы имѣть $x = y - \frac{1}{3}a$.

749.

Помощію сей переменны въ состояніи мы найви корни всѣхъ кубичныхъ уравненій, что слѣдующимъ примѣромъ изъяснить можно: пусть будемъ данное уравненіе $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$, и дабы изъ него исключить второй членъ, то положи $x - 2 = y$, и будемъ

$$x = y$$

$$x = y + 2; \quad xx = yy + 4y + 4; \quad x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8;$$

$$\text{слѣд. } x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$$

$$- 6xx = - 6yy - 24y - 24$$

$$+ 13x = + 13y + 26$$

$$- 12 = - 12$$

$y^3 + y - 2 = 0$, или $y^3 = -y + 2$, что по формулѣ $x^3 = fx + g$ даетъ $f = -1$, $g = 2$ и $gg = 4$, $f^3 = -1$ слѣд.; $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$ отсюда получится $V(gg - \frac{4}{27}f^3) = V\frac{112}{27} = \frac{\sqrt[3]{112}}{3}$

$$\text{откуда слѣдуетъ } y = \sqrt[3]{\frac{2 + 4\sqrt[3]{21}}{9}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{2 - 4\sqrt[3]{21}}{9}}, \quad \text{или}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1 + 2\sqrt[3]{21}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1 - 2\sqrt[3]{21}}{9}}, \quad \text{или}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9 + 2\sqrt[3]{21}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{9 - 2\sqrt[3]{21}}{9}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{27 + 6\sqrt[3]{21}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{27 - 6\sqrt[3]{21}}{27}}, \quad \text{или}$$

$$y = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt[3]{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt[3]{21}};$$

изъ чего выдешъ $x = y + 2$.

750.

При разрѣшеніи сего примѣра, хощя дошли мы до двоякой неизвлекаемости; однако изъ сего заключать не должно, что корень дѣйствительно быть долженъ неизвлекаемое число, ибо случится можетъ, что биномъ или двучленное количество $27 \pm 6\sqrt{21}$ будетъ дѣйствительной кубъ; что самое и дѣйствительно случилось. Ибо кубъ половины $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} = \frac{27 \pm 42\sqrt{21}}{8} = 27 \pm 6\sqrt{21}$; слѣд кубичной корень изъ $27 \pm 6\sqrt{21} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$, а кубичной корень изъ $27 - 6\sqrt{21} = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$, по чему величина $y = \frac{1}{3}(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}) + \frac{1}{3}(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, и когда $y = 1$, то будетъ $x = 3$, которое число есть корень предложеннаго уравненія; а естли бы захотѣлъ кто сыскать и другіе два корня, то должно бы уравненіе раздѣлить на $x - 3$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-3 \left| \begin{array}{l} x^3 - 6xx + 13x - 12 \\ x^3 - 3xx \\ \hline -3xx + 13x \\ -3xx + 9x \\ \hline +4x - 12 \\ +4x - 12 \\ \hline \end{array} \right| x^2 - 3x + 4
 \end{array}$$

Положивъ частное $xx - 3x + 4 = 0$,
будетъ $xx = 3x - 4$, откуда $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{16}{1}\right)}$
 $= \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, то есть $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-7}}{2}$ оба по-
слѣднѣе корня, которые суть невозможны.

751.

Здѣсь должно приписывать шас-
тѣю, что изъ найденныхъ биноміевъ
дѣйствительно кубичной корень извлечь
можно было, что въ тѣхъ только слу-
чаяхъ дѣлается, когда уравненіе имѣетъ
раціональной корень, которой бы для
сей причины гораздо легче найти можно
было, по правилу въ прежней главѣ пред-
писанному. А если уравненіе не имѣ-
етъ раціональнаго корня, то не можно
иначе его изъяснить, какъ по сему Карда-
нову

нову правилу, такъ что въ томъ случаѣ
никакое сокращеніе уже мѣста не имѣетъ.
Какъ напр. въ уравненіи $x^3 = 6x + 4$,
гдѣ $f = 6$, $g = 4$, найдется $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})}$
 $+ \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, коего иначе изъяснить
нельзя.



ГЛАВА XIII.

О разрѣшеніи уравненій четвертой сте-
пени, кои также и биквадратные
называются.

752

Если высшая степень числа x бу-
детъ четвертая, то такія уравненія
называются уравненіями четвертой сте-
пени или биквадратными, коихъ общая
формула есть $x^4 + ax^2 + bx + d = 0$.
Изъ сего рода уравненій сперва разсмо-
треть надлежитъ чистые биквадратные
уравненія, которыхъ формула есть $x^4 + f$,
и изъ коихъ тотчасъ корень найти мо-
жно

Тамъ II. Л жно

жно, извлекая только съ обоихъ сторонъ корень четвертой степени, какъ $x = \sqrt[4]{f}$.

753.

Послику x^2 есть квадратъ изъ x , то выкладка немало облегчится, если сперва извлечется только квадратной корень, ибо тогда будетъ $xx = \sqrt{f}$, а потомъ извлекая въ другой разъ тотъ же квадратной корень будетъ $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, такъ что $\sqrt[4]{f}$ ни что иное есть, какъ квадратной корень изъ квадратнаго корня f .

Если бы напр. уравненіе было $x^4 = 2401$, то отсюда найдется сперва $xx = 49$, а потомъ $x = 7$.

754.

Но симъ образомъ находимъ мы только одинъ корень; а послику каждое кубическое уравненіе оныхъ имѣетъ три, то безъ сумнѣнія ихъ здѣсь должно быть 4, кои симъ образомъ найдутся. Въ послѣднемъ примѣрѣ нашли мы не только $xx = 49$, но также $xx = -49$, то явствуетъ

ствуетъ, что изъ перваго найдутся два корня $x=7$ и $x=-7$; а изъ другаго $x=\sqrt{-49}=7\sqrt{-1}$ и $x=-\sqrt{-49}=-7\sqrt{-1}$, кои суть 4 корня числа 2401; по же самое должно думать и о всѣхъ прочихъ числахъ.

755.

Послѣ сихъ чистыхъ уравненій слѣдуютъ по порядку тѣ, въ которыхъ втораго и четвертаго члена не находится, или кои въ сей формулѣ содержатся: $x^2+fx+g=0$, и кои по правилу квадратныхъ уравненій разрѣшены быть могутъ. Ибо положивъ $xx=y$ будетъ $y^2+fy+g=0$ или $yy=-fy-g$ откуда найдется $y=-\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2-g} = \frac{-f \pm \sqrt{f^2-4g}}{2}$

и поелику $xx=y$, то отсюда будетъ $x=\pm \sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{f^2-4g}}{2}}$, гдѣ двойные знаки \pm покажутъ всѣ 4 корня уравненія.

756.

Когда же въ уравненіи всѣ члены находятся, то можно оное почести какъ произведеніе изъ четырехъ множителей.

Ибо умножѣ сѣи 4 множителя между собою $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, то найдется слѣдующее произведеніе: $x^4 - x^3(p+q+r+s) + xx(pq+pr+ps+qr+qs+rs) - x(pqr+prs+qrs+pqrs)$, которая формула не иначе о бытъ можетъ, какъ когда одинъ изъ сѣихъ 4 хъ множителей будетъ 0, а сѣе въ 4 хъ случаяхъ здѣлаться можетъ

I) когда $x=p$; II) $x=q$; III) $x=r$; IV) $x=s$ кои слѣдовательно суть корни предложеннаго уравненія.

757.

Ежели мы сѣю формулу обстоятельно разсмотримъ, то найдемъ, что во второмъ членѣ находится сумма всѣхъ 4 хъ корней помноженныхъ на $-x^3$; въ третьемъ членѣ находится сумма произведеній изъ каждаго двухъ корней умноженныхъ между собою и на xx ; въ четвертомъ сумма произведеній каждаго трехъ корней помноженныхъ между собою и на $-x$; и наконецъ въ пятомъ и послѣднемъ находится произведеніе изъ всѣхъ

всѣхъ четырехъ корней помноженныхъ между собою.

758.

Поелику послѣдней членъ есть произведение изъ всѣхъ 4 хъ корней, то такое биквадратное уравненіе, не можетъ другаго раціональнаго имѣть корня, какъ того, которой вмѣстѣ есть и дѣлитель послѣдняго члена. По сей причинѣ всѣ раціональные корни, еслили только они въ уравненіи содержатся, легко найти можно, полагая только мѣсто x по порядку каждаго дѣлителя послѣдняго члена, и смотря по которымъ изъ нихъ уравненіе разрѣшится; и еслили хотя только одинъ такой корень найдется, какъ напр. $x = p$, то раздѣлив уравненіе, перенеся всѣ члены на одну сторону, на $x - p$, и частное положивъ $= 0$ дастъ кубическое уравненіе, которое по предписаннымъ выше сего правиламъ разрѣшить можно.

Къ сему требуется, чтобъ всѣ члены состояли изъ цѣлыхъ чиселъ, и чтобъ первой членъ умноженъ былъ только на 1. А когда бы въ нѣкоторыхъ членахъ случились дроби, то должно бы было ихъ сперва исключить изъ уравненія, что всегда учиниться можетъ, полагая мѣсто x число y раздѣленное на число, которое знаменателей дробей въ себѣ заключаеиъ. Такъ когда бы дано было уравненіе $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx - \frac{2}{4}x + \frac{1}{12} = 0$, и когда въ знаменателяхъ 2 и 3 съ ихъ степенями находяпся, то положи $x = \frac{y}{6}$, и будетъ $\frac{y^4}{6^4} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{6^3} + \frac{1}{3} \frac{yy}{6^2} - \frac{2}{4} \frac{y}{6} + \frac{1}{12} = 0$, что умноживъ на 6^4 дастъ $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$; и если бы теперь кто захотѣлъ знать, имѣетъ ли сіе уравненіе раціональные корни, то къ сему требуется только класть по порядку всѣхъ дѣлителей числа 72 мѣсто y , и смотрѣть когда уравненіе равно 0 будетъ.

760.

Но поелику корни уравненія какъ положительные , такъ и отрицательные быть могутъ , то съ каждымъ дѣлителемъ должно бы было дѣлать двѣ пробы , первую полагая его положительнымъ , а вторую отрицательнымъ. Но здѣсь примѣчать надлежитъ , что сколь часто два знака $+$ и $-$ между собою перемѣняются , уравненіе имѣетъ столькоже положительныхъ корней ; а сколько разъ два одинакіе знака другъ за другомъ слѣдуютъ , столько отрицательныхъ корней уравненіе имѣетъ. И поелику въ нашемъ примѣрѣ 4 перемѣны знаковъ находятся , и нѣтъ ни одного слѣдствія оныхъ , того ради всѣ корни онаго суть положительные , и поему нѣтъ нужды брать дѣлителя послѣдняго члена отрицательнаго

761.

Пусть будетъ напр. дано уравненіе $x^4 + 2x^3 - 7xx^2 + 8x + 12 = 0$, здѣсь находящіяся двѣ перемѣны знаковъ и два

Л 4

слѣд-

слѣдствія , изъ чего вѣрно заключить можно , что сіе уравненіе имѣетъ два корня положительные, и два отрицательные ; кои всѣ должны быть дѣлителями послѣдняго члена ; и когда оныя суть 1, 2, 3, 4, 6, 12 , то здѣлай сперва пробу, положивъ $x = +1$, и выдетъ дѣйстви-тельно 0 , по чему одинъ корень есть $x = 1$; а когда положишся еще $x = -1$, то выдетъ слѣдующее $+1 - 2 + 8 - 12 - 7 = 21 - 9 = 12$ и слѣд. $x = -1$ не можетъ быть корень сего уравненія. Положи еще $x = 2$, то наша формула будетъ опять 0 , по чему $x = 2$ есть корень уравненія ; напротивъ того $x = -2$ онымъ быть не можетъ. Положи еще $x = 3$, то выдетъ $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$, не годится ; а ежели положишся $x = -3$, то выдетъ $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$ и $x = -3$ есть корень уравненія ; такожде найде-тся, что $x = -4$ будетъ корень уравне-нія , такъ что всѣ 4 корня суть раці-ональны , и такого соспоянія :

I) $x=1$; II) $x=2$, III) $x=-3$; IV) $x=-4$, изъ коихъ два положительные , и два отрицательные , какъ прежде правдо показывашь.

762.

Когда же въ уравненіи не будетъ ни одного рациональнаго корня , по симъ образомъ найти ихъ не лзя; и для того ученые думали, какимъ бы образомъ въ сихъ случаяхъ , не извлекаемые корни изъявись можно было ; и въ семъ спольщасливъ были , что нашли два различные средства къ достиженію познанія такихъ корней , какого бы состоянія биквадратнос уравненіе ни было.

Но прежде нежели мы сіе средство покажемъ , не безнужно разрѣшить напередъ нѣсколько особливыхъ случаевъ , кои весьма часто съ пользою употреблены быть могутъ.

763.

Если уравненіе будетъ такого состоянія, что въ немъ числа при членахъ

А 5

нахъ

нахъ находящіяся такимъ же порядкомъ идущъ въ задъ, какъ и въ передъ, какъ видно въ уравненіи $x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0$ которое вообще изображено быть можетъ $x^4 + max + naax + ma^3x + a^4 = 0$, которую формулу всегда почестъ можно за произведеніе изъ двухъ квадратныхъ множителей, кои легко опредѣлить можно. Ибо мѣсто сего уравненія положи слѣдующее произведеніе $(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$, гдѣ p и q сыскаши надлежишъ, чтобъ вышло прежнее уравненіе. Понеже по дѣйствительному умноженію находишся

$x^4 + (p + q)ax^3 + (pq + 2)aaqx + (p + q)a^3x + a^4 = 0$, и чтобы сіе уравненіе прежнему равно было, требуются двѣ вещи: I) $p + q = m$; II) $pq + 2 = n$; слѣд. $pq = n - 2$; взявъ первой квадратъ будстъ $pp + 2pq + qq = mm$, изъ сего второе 4 раза взятое вычти, аимянно $4pq = 4n - 8$ останеся $pp - 2pq + qq = mm - 4n + 8$, коего квадратной корень $p - q = \sqrt{mm - 4n + 8}$; но $p + q = m$

$= m$, по сложению получимъ $2p = m + \sqrt{(mm - 4n + 8)}$ или $p = \frac{m + \sqrt{(mm - 4n + 8)}}{2}$, а по вычитанію $2q = m - \sqrt{(mm - 4n + 8)}$ или $q = \frac{m - \sqrt{(mm - 4n + 8)}}{2}$ а найдя p и q положи только каждаго множителя $= 0$, ишобы оппудѣ найти величину x .

Первой $xx + pax + aa = 0$ или $xx = -pax - aa$ дастъ $x = -\frac{p^2}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - aa}$ или $x = -\frac{p^2}{2} \pm a\sqrt{(\frac{p^2}{4} - 1)}$ или $x = -\frac{p^2}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(pp - 4)}$

Другой множитель дастъ $x = -\frac{q^2}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(qq - 4)}$. Симъ образомъ найдутся 4 корня даннаго уравненія.

764.

Для извѣсненія сего пусть дано будетъ уравненіе $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$, здѣсь $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, слѣд. $mm - 4n + 8 = 36$, откуда квадратной корень $= 6$ чего ради получится $p = \frac{-4 + 6}{2} = 1$; и $q = \frac{-4 - 6}{2} = -5$, по чему 4 корня будутъ I) и II) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; III)

и IV) $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, и такъ 4 кор-
ня данного уравненія будутъ слѣдующія
I) $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; II) $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; III) $x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$;
IV) $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$, изъ коихъ первые два не
возможные, прочіе же два возможны;
по тому что $\sqrt{21}$ такъ акуратно опре-
дѣлить можно, какъ кто захочетъ,
изобразивъ корень въ дробяхъ десятич-
ныхъ; ибо 21 то же что и 21, 000000000,
того ради извлечи отсюда квадратной
корень какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 00 \overline{) 00 \overline{) 00 \overline{) 00 \overline{) 4}}}, 5825 \\ 16 \end{array}$$

500

82

425

7500

82

7264

23600

8202

18324

527600

8202

458225

69375

поелыку

поселику $\sqrt{21} \approx 4, 5825$, то третьей корень будетъ почти точно $x \approx 4, 7912$, и четвертой $x \approx 0, 2087$, которые еще точнѣе вычислить можно.

Понеже четвертой корень довольно справедливъ, то есть $\frac{2}{10}$ или $\frac{1}{5}$, того ради сія величина почти разрѣшитъ наше уравненіе; и такъ положа $x = \frac{1}{5}$, будетъ $\frac{1}{5^2} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$, а должно бы быть ≈ 0 , что довольно съ правдою сходно.

765,

Другой случай, въ которомъ подобное сему рѣшеніе мѣсто имѣетъ, есть, когда числа въ уравненіи будутъ всѣ тѣ же, какъ и въ прежнемъ, только что при второмъ и четвертомъ членахъ разные съ прежними знаки находятся. Такое уравненіе будетъ,

$x^4 - max^3 + paax - ma^3x + a^4 = 0$,
которое извѣщено быть можетъ слѣдующимъ произведеніемъ $(xx + pax - aa)$
 $(ax + qax - aa) = 0$, и чрезъ самое умноженіе получится $x^4 + (p + q)ax^3 + (pq - 2)aaax$

$axx - (p+q)a^2x + a^4$, которое съ прежнимъ уравненіемъ будетъ одинако, естли будетъ $p+q=m$, и $pq-2=n$, или $pq=n+2$; ибо четвертой членъ самъ по себѣ будетъ тотъ же съ прежнимъ. Возми квадратъ перваго уравненія $pp+2pq+q^2=m^2$, изъ сего вычпи вышорос 4 раза взятое, ш: с $4q=4n+8$ и будетъ $pp-2pq+qq=mm-4n-8$, откуда квадратной корень дастъ $p-q=\sqrt{(mm-4n-8)}$; слѣд. будетъ $p=\frac{m+\sqrt{(mm-4n-8)}}{2}$ и $q=\frac{m-\sqrt{(mm-4n-8)}}{2}$. Симъ образомъ нашедъ p и q первой множитель дастъ сіи два корня $x=-\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(pp+4)}$; а второй множитель сіи два $x=-\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(qq+4)}$. Симъ образомъ найдены будутъ всѣ 4 корня уравненія предложеннаго.

766.

Пусть дано будетъ наприм. уравненіе $x^4-3.2x^2+3.8x+16=0$, гдѣ $a=2$, и $m=-3$, и $n=0$; слѣд. $\sqrt{(mm-4n-8)}=1$, и $p=\frac{-3+1}{2}=-1$; $q=\frac{-3-1}{2}=-2$, откуда
два

два первые корня будутъ $x = 1 \pm \sqrt{5}$, а два послѣдніе $x = 2 \pm \sqrt{8}$, такъ что всѣ 4 искомыя корня суть I) $x = 1 + \sqrt{5}$; II) $x = 1 - \sqrt{5}$; III) $x = 2 + \sqrt{8}$; IV) $x = 2 - \sqrt{8}$. По сему 4 множителя нашего уравненія будутъ $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$ которые самымъ дѣломъ умножены будучи между собою, наше уравненіе произвести должны; ибо изъ умноженія перваго и втораго выйдутъ $x^2 - 2x - 4$; изъ умноженія двухъ другихъ выйдутъ $x^2 - 4x - 4$, и сіи два произведенія между собою умноженные, дадутъ $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$ точно въ нашемъ примѣрѣ предложенное уравненіе.



ГЛАВА XIV.

О Помбеллиевомъ правилѣ биквадратные уравненія приводить въ кубичные.

767.

Послику мы уже видѣли, какъ кубичныя уравненія рѣшаются по правилу Кардана, то при биквадратныхъ уравненіяхъ все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ рѣшеніе оныхъ знать обращать въ кубичные уравненія. Ибо безъ помощи кубичнаго уравненія биквадратное разрѣшить вообще не возможно, потому что хотя бы и нашелся одинъ корень такого уравненія, то остальные пребудутъ еще кубичнаго рѣшенія. Отсюда видно, что для рѣшенія уравненій вышешихъ степеней должно знать напередъ рѣшеніе нижнихъ.

768.

На сей конецъ Италіанецъ Помбелли за нѣсколько уѣзъ сошъ лѣтъ предъ симъ нашелъ правило, которое мы въ сей главѣ предложили намѣрены.

Пусть

Пусть дано будетъ генеральное би-
квадратное уравненіе $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, гдѣ буквы a, b, c и d всѣ воз-
можныя числа значить могутъ. Теперь
представимъ себѣ надлежитъ , что сіе
уравненіе одинаково съ слѣдующимъ $(xx + ax + p)^2 - (qx + r)^2$, гдѣ нужно толь-
ко опредѣлить буквы p, q и r , такъ
чтобы вышло данное уравненіе , и при-
ведя послѣднее сіе въ порядокъ выдетъ :

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \frac{1}{4}a^2xx + arx + pp \\ + 2pxx - 2qrx - rr \\ - qqxx \end{aligned}$$

Первые два члена здѣсь съ двумя пер-
выми даннаго уравненія одинаки , а мѣ-
сто третьяго должно положить $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, откуда будетъ $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$; мѣсто четвертаго положить дол-
жно $ar - 2qr = c$, откуда $2qr = ar - c$,
а мѣсто послѣдняго надлежитъ поло-
жить $pp - rr = d$, и будетъ $rr = pp - d$,
и изъ сихъ трехъ уравненій должно опре-
дѣлить буквы p, q и r ,

769.

Что бы сіе легче учинить , то возми первое уравненіе 4 жды , и будетъ $4qq = aa + 8p - 4b$, сіе умножь на послѣд-
нес. $rr = pp - d$, и получишся $4qqrr = 8p^2$
 $+ (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b)$, возми теперь
квадратъ средняго уравненія $4qqrr = aarp$
 $- 2acr + cc$, по чему будемъ мы имѣть
двѣ величины для $4qqrr$, которые поло-
живъ равными между собою , произой-
детъ уравненіе $8p^2 + (aa - 4b)pp - 8dp - d$
 $(aa - 4b) = aarp - 2acr + cc$ и перенеся всѣ
члены на одну сторону , выдетъ $8p^2$
 $- 4brr + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0$,
которое есть кубическое уравненіе , и изъ
какого въ каждомъ случаѣ величину p по
выше показанному правилу опредѣлять
должно.

770.

И когда изъ данныхъ чиселъ a , b ,
 c , d найдена будетъ буква p , то доволь-
но уже сего будетъ , чтобы найти ош-
тудъ двѣ другіе q и r , изъ перваго ура-
вненія будетъ $q = \sqrt{(aa + 2p - b)}$, а изъ
другаго

другаго $r = \frac{p-c}{2}$. И если сіи при бук-
вы для каждаго случая уже найдены, то
оптуда можно сыскать всѣ 4 корня
предложеннаго уравненія слѣдующимъ
образомъ.

771.

Когда данное уравненіе привели мы
въ формулу $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$,
то $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$, откуда из-
влекши квадратной корень будетъ $xx + \frac{1}{2}ax$
 $+ p = qx + r$, или также $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$.

Первое уравненіе дастъ $xx = (q - \frac{1}{2}a)$
 $x - p + r$, откуда получатся два корня,
прочіе же два изъ другаго, которое
есть $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x = p - r$. Чтобы сіе
правило изъяснить примѣромъ, то пусть
предложено будетъ уравненіе $x^4 - 10x^3$
 $+ 35xx - 50x + 24 = 0$, которое срав-
нимъ съ генеральною нашею формулою,
дастъ $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$.
изъ коихъ для опредѣленія p слѣдующее
уравненіе происходитъ $8p^2 - 140pp + 808p$
 $- 1540 = 0$, которое раздѣливъ на 4 дастъ
 $2p^2 - 35pp + 202p - 385 = 0$. Дѣлители
М 2 послѣ-

послѣдняго члена суть 1, 5, 7, 11 и пр. эдѣсь 1 мала, естли же положится $p=5$, то выдесть $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, слѣд. $p=5$, и когда положишь $p=7$, то выдесть $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$, слѣд. $p=7$, другой корень; а чпо бы сыскать и третей корень, то раздѣли уравненіе на 2, и выдесть $p^3 - \frac{35+p}{2} + 101p - \frac{36}{2} = 0$; и когда число во второмъ членѣ $\frac{36}{2}$ естль сумма всѣхъ трехъ корней, первые же 2 вмѣстѣ дѣлають 12, чего ради третей корень долженъ быть $\frac{11}{2}$. Такимъ образомъ нашли мы всѣ три корня, но довольно бы было и одного, потому что изъ каждаго изъ нихъ четыре корня нашего биквадратнаго уравненія опредѣлились должны.

772.

Дабы сіе показать, то пусть сперва будеть $p=5$, откуда $q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$, $r = \frac{-10 \pm 5}{2} = \frac{5}{2}$. Но поелику симъ образомъ ни чего опредѣлить нельзя, то возми третіе уравненіе $rr = pr - d = 25 - 24 = 1$, слѣд. $r = 1$; отсюда оба наши квадратныя уравненія будутъ I) $xx = 5x - 4$, II)

II) $xx = 5x - 6$: первое дастъ сѣи два корня $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$, или $x = \frac{5 \pm 5}{2}$, т. е. $x = 4$, или $x = 1$.

Другое уравненіе дастъ $x = 5 \pm \sqrt{1}$, или $x = \frac{5 \pm 1}{2}$, то есть $x = 3$, или $x = 2$.

Естьли же положимся $p = 7$, то будетъ $q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$ и $r = \frac{-70 \pm 50}{4} = -5$; откуда производятъ сѣи два квадратныя уравненія: I) $xx = 7x - 12$; II) $xx = 3x - 2$, изъ коихъ первое дастъ корни $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$; слѣд. $x = \frac{7 \pm 7}{2}$, то есть $x = 4$, или $x = 3$, другое дастъ корни $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, слѣд. $x = \frac{3 \pm 3}{2}$ и $x = 2$, или $x = 1$, кои суть тѣ же самые 4 корня какіе прежде найдены были, и самые тѣ же найдутся и изъ третьей величины $p = \frac{11}{2}$; ибо тогда будетъ $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ и $r = \frac{-55 \pm 30}{2} = -\frac{5}{2}$; откуда два квадратныя уравненія

I) $xx = 6x - \frac{16}{2}$, или $xx = 6x - 8$; II) $xx = 4x - 3$: изъ перваго получится $x = 3 \pm \sqrt{1}$, слѣд. $x = 4$, и $x = 2$; изъ другаго $x = 2 \pm \sqrt{1}$, то есть $x = 3$ и $x = 1$, копорые суть тѣ же 4 корня.

773.

Пусть дано будетъ еще сіе уравненіе $x^3 - 16x - 12 = 0$, въ кошоромъ $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$, по чему кубическое наше уравненіе будетъ $8p^3 - 8dp - cc = 0$; или $8p^3 + 96p - 256 = 0$, то есть $p^3 + 12p - 32 = 0$, кошорое уравненіе еще простяе здѣлается положивъ $p = 2t$; ибо тогда будетъ $8t^3 + 24t - 32 = 0$, или $t^3 + 3t - 4 = 0$. Дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, изъ коихъ $t = 1$ есть одинъ корень, откуда $p = 2$ и $q = \sqrt{4} = 2$, $r = \frac{16}{4} = 4$, чего ради оба квадратныя уравненія будутъ $xx = 2x + 2$ и $xx = -2x - 6$; слѣд. корни $x = 1 \pm \sqrt{3}$, и $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

774.

Для большаго изъясненія предложеннаго рѣшенія повторимъ оное снова въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Пусть будетъ данное уравненіе $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, кошорое должно содержаться въ формулѣ $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, гдѣ въ первой части положено $-3x$ для того, что -3 есть поло-

половина числа во второмъ членѣ уравненія -6 , и разрѣшивъ сію формулу выдешъ $x^2 - 6x + (2p + 9 - qq)xx - (6p + 2qr) x + pp - rr = 0$. Сію формулу сравнивая съ даннымъ уравненіемъ получатся I) $2p + 9 - qq = 12$, II) $6p + 2qr = 12$; III) $pp - rr = 4$: изъ перваго будешъ $qq = 2p - 3$; изъ другаго $2qr = 12 - 6p$, или $qr = 6 - 3p$; изъ третьяго $rr = pp - 4$. Помножь теперь rr и qq между собою, получится $qqrr = 2p^2 - 3pp - 8p + 12$, и еслили возмется квадратъ qr , то есть $qqrr = 36 - 36p + 9pp$, то получится уравненіе $2p^2 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, или $2p^2 - 12pp + 28p - 24 = 0$, или раздѣливъ на 2 $p^2 - 6pp + 14p - 12 = 0$, косо корень $p = 2$, откуда $qq = 1$ и $q = 1$, $qr = r = 0$, и такъ уравненіе наше будешъ $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, откуда квадратной корень $xx - 3x + 2 = \pm x$. Еслии мѣсто имѣшъ верхней знакъ, то выдешъ $xx = 4x - 2$, еслии же нижней, то $xx = 2x - 2$, откуда 4 корня найдутся $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.



ГЛАВА XV.

О новомъ рѣшеніи биквадратныхъ
уравненій.

775.

Какъ по прежнѣму правилу Помбелліа биквадратныя уравненія рѣшаются помощію кубичныхъ, такъ самое то же учинить можно по найденному послѣ того средству, которое отъ прежняго совсѣмъ различествуетъ, и заслуживаетъ особливое изъясненіе.

776.

Положи будто бы корень биквадратнаго уравненія имѣлъ сію формулу $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ буквы p , q и r означаютъ три корня, такого кубичнаго уравненія какъ $z^3 - fzz + gz - h = 0$, такъ что $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ и $pqr = h$, сіе положивъ возьми квадратъ означенной формулы $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, которой будешь $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq}$
+ 2

$+ 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$, понеже $p + q + r = f$, то будетъ $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; возми еще квадратъ сего уравненія, которой будетъ $x^4 - 2xxf + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}$, и когда $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, то перенеся его на другую сторону будетъ $x^4 - 2xxf + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$ и когда $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$, а $pqr = b$, такъ что $\sqrt{pqr} = \sqrt{b}$, то симъ образомъ получимъ мы сіе биквадратное уравненіе $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{b} + ff - 4g = 0$, коего корень дѣйствительно буде пѣ $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ p , q и r суть три корня прежняго кубическаго уравненія.

777.

Выведенное такимъ образомъ биквадратное уравненіе, можетъ ваяпо быть за генеральное, хотя въ немъ x^4 и не находится; ибо каждое полное уравненіе можно превратить всегда въ такое, въ которомъ втораго члена не на-

М 5

ходится,

ходился, какъ мы послѣ сего покажемъ. И такъ пусть дано будетъ сіе биквадратное уравненіе $x^4 - axx - bx - c = 0$, коего найти должно корень, сравнивая его съ найденною формулою; а что бы сыскалъ буквы f, g, h , то требуется чѣмъ было I) $2f = a$, т. е. $f = \frac{a}{2}$; II) $8Vb = b$ т. е. $Vb = \frac{b}{8}$ и $g = \frac{bb}{4}$; III) $ff - 4g = -c$, или $\frac{aa}{4} - 4g = -c$, или $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, по чему $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

778.

Когда изъ предложеннаго уравненія $x^4 - axx - bx - c = 0$ найдутся буквы f, g, h , такъ что $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$, и $h = \frac{1}{4}bb$, или $Vh = \frac{1}{2}b$, то опшуда здѣлай уравненіе $z^3 - fzz + gz - h = 0$, коего 3 корня по выше показанному правилу находишь должно, и кои будутъ I) $z = p$; II) $z = q$; III) $z = r$, изъ коихъ попомъ, естли они найдены будутъ, корень нашего биквадратнаго уравненія выдстъ $x = Vp + Vq + Vr$.

779.

779.

Хотя и кажется, что такимъ образомъ нашелся одинъ только корень нашего уравненія ; но послѣку каждой квадратной корень, какъ положительной, такъ и отрицательной знакъ при себѣ имѣть можетъ, по чему формула сія содержитъ всѣ 4 корня.

Если бы въ рѣшеніи всѣ перемѣны знаковъ допущены были, то бы вышли 8 величинъ для x , изъ коихъ однако только 4 мѣсто имѣть могутъ. При семъ примѣчать надлежитъ, что произведеніе изъ трехъ членовъ, т. е. \sqrt{pqr} должно быть равно $\sqrt{g} = \frac{1}{2}b$; откуда ежели $\frac{1}{2}b$ будетъ положительное число, то и произведеніе 3 хъ частей положительное, въ которомъ случаѣ только 4 перемѣны быть могутъ:

I) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; II) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$; III) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; IV) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$; если же $\frac{1}{2}b$ будетъ число отри-

отрицательное , то 4 величины для x будутъ слѣдующіе :

$$I)x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}; \quad II) x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r};$$

$$III)x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}; \quad IV)x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}.$$

По сему примѣчанію въ каждомъ случаѣ могутъ опредѣлены быть всѣ 4 корня, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно.

780.

Пусть дано будетъ биквадратное уравненіе , въ которомъ втораго члена не находящагося $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$; сравнивъ его съ прежнею формулою будетъ $a = 25$, $b = -60$ и $c = 36$, откуда получимся $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$; и $h = \frac{225}{4}$, слѣд. кубическое уравненіе будетъ $z^3 - \frac{25}{2}zz + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0$; а что бы исключить отсюда дроби , то положи $z = \frac{u}{4}$ и будетъ $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{uu}{16} + \frac{769}{16} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, которое умноживъ на 64 выдетъ $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0$, изъ котораго три корня найти должно , кои всѣ суть положительные ; одинъ изъ нихъ $u = 9$, а что

что бы сыскать другіе два, то раздѣли уравненіе на $u-9$, и выйдетъ сіе новое $uu-4u-400=0$, или $uu=4u+400$, откуда найдемся $u=\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1600}{4}\right)-\left(\frac{1600}{4}\right)}=\frac{1}{2}$; слѣд. искомыя 3 корня будутъ $u=9$, $u=16$, $u=25$, откуда получимъ мы: I) $z=\frac{9}{4}$; II) $z=4$; III) $z=\frac{25}{4}$, и сіи суть корни буквъ p , q и r , такъ что $p=\frac{9}{4}$, $q=4$, $r=\frac{25}{4}$; и $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}=-\frac{15}{2}$, то есть равно числу отрицательному; чего ради въ разсужденіи знаковъ корней \sqrt{p} , \sqrt{q} , \sqrt{r} должно смотрѣть на оное, а именно или одинъ изъ нихъ или всѣ три будутъ отрицательные. Но когда $\sqrt{p}=\frac{3}{2}$, $\sqrt{q}=2$ и $\sqrt{r}=\frac{5}{2}$, то 4 корня предложеннаго уравненія будутъ:

$$\text{I) } x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$$

$$\text{II) } x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$$

$$\text{III) } x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$$

$$\text{IV) } x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6, \text{ откуда произ-}$$

ходящъ сіи 4 множителя уравненія:

$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0$, изъ
коихъ два первые даютъ $xx-3x+2$, а
два послѣдніе $xx+3x-18$, и сіи два
произведенія помноженныя между собою
даютъ точно наше уравненіе.

781.

Осталось еще показать, какимъ
образомъ биквадратное уравненіе, въ ко-
торомъ второй членъ есть, пре-
вратить въ другое, въ которомъ бы его
не было; къ сему служишь слѣдующее
правило.

Пусть дано будетъ сіе генеральное
уравненіе $y^4 + ay^2 + byy + cy + d = 0$,
приложи къ y четвертую часть числа
при второмъ членѣ находящагося $\frac{1}{4}a$,
и напиши мѣсто онаго другую букву x ,
такъ чтобъ $y + \frac{1}{4}a = x$, слѣд. $y = x - \frac{1}{4}a$,
отсюда будетъ $yy = xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa$; y^2
 $= x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa$, и наконецъ

$$y^4 = x^4$$

$$\begin{array}{rcl}
 y^4 & = & x^4 - ax^3 + \frac{3}{8}aaxx - \frac{1}{16}a^2x + \frac{1}{256}a^4 \\
 + ay^3 & = & + ax^3 - \frac{3}{8}aaxx + \frac{1}{16}a^2x - \frac{1}{256}a^4 \\
 + byy & = & + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\
 + cy & = & + cx - \frac{1}{4}ac \\
 + d & = & + d
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x^4 & - \frac{3}{8}aaxx + \frac{1}{16}a^2x - \frac{1}{256}a^4 & \} \\
 + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab & & \} = 0 \\
 + cx - \frac{1}{4}ac + d & & \}
 \end{array}$$

Гдѣ какъ видно вѣсѣраго члена не находится , такъ что данное правило при немъ теперь употребивъ 4 корня x найши можно , изъ коихъ пошомъ величины y сами собою означатся , ибо $y = x - \frac{1}{4}a$.

782.

Далѣе четвертой степени рѣшеніе алгебраическихъ уравненій не простирается , и всѣ старанія разрѣшать подобнымъ образомъ уравненія 5той и вышшихъ степеней , или привести ихъ по крайней мѣрѣ въ уравненія нижнихъ степеней были тщетны , такъ что не возможно

можно ни коимъ образомъ дать генеральнаго правила находить корни вышешихъ степеней, и все что въ разсужденіи сего ни изосрѣшено, не проспирася далѣе, какъ только до такихъ уравненій, гдѣ рациональной корень содержится, которой чрезъ пробу легко найти можно, будучи извѣстно, что оной долженъ быть дѣлителемъ послѣдняго члена, съ коимъ также точно поступать надлежитъ, какъ уже въ кубическихъ и биквадратныхъ уравненіяхъ нами показано было.

783.

Не безнужно также здѣсь показать употребленіе сего правила въ уравненіяхъ имѣющихъ неизвлекаемые корни.

Пусть такое уравненіе будетъ
 $y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8$. Прежде всего надлежитъ здѣсь выключить второй членъ, для чего къ числу y приложимъ еще четвертую часть числа при второмъ членѣ находящагося, т. е. $y - 2 = x$ и $y = x + 2$, по чему $yy = xx + 4x + 4$; $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{и } y^4 & = & x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 \\
 - 8y^2 & = & - 8x^3 - 48x^2 - 96x - 64 \\
 + 14y & = & + 14x^2 + 56x + 56 \\
 + 4y & = & + 4x + 8 \\
 - 8 & = & - 8 \\
 \hline
 & & x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0 ;
 \end{array}$$

Сіе уравненіе сравнимъ съ генеральною нашею формулою , найдемся $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; откуда заключаемъ $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$, $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$; изъ чего видно что произведеніе \sqrt{pqr} будетъ положительное, и по сему кубическое уравненіе должно быть $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, изъ котораго должно найти три корня p , q и r .

784.

Гдѣ семъ случаѣ съ самаго начала , должно изъ уравненія исключить дроби ; положивъ $z = \frac{u}{4}$, будетъ $\frac{u^3}{64} - \frac{5u^2}{16} + \frac{17u}{16} - \frac{1}{4} = 0$, и помноживъ на 8 , выйдетъ $u^3 - 15u^2 + 17u - 2 = 0$; гдѣ всѣ корни суть положительные : и когда дѣлители послѣдняго

Томъ II.

Н

члена

члена суть 1 и 2, то положи сперва $u=1$. и будетъ $1-10+17-2=6$, и слѣд. не 0, а если положишь $u=2$, то выйдетъ $8-40+34-2=0$; почему $u=2$ есть одинъ корень сего уравненія; а что бы найти и другіе два, то раздѣли оно уравненіе на $u-2$ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 u-2 \overline{) u^3-10u+17u-2} \quad | \quad uu-8u+1 \\
 \underline{u^3-2uu} \\
 -8uu+17u \\
 \underline{-8uu+16u} \\
 +u-2 \\
 \underline{+u-2} \\
 0
 \end{array}$$

И произойдетъ $uu-8u+1=0$, или $uu=8u-1$, откуда оба остальные корни $u=4 \pm \sqrt{15}$; и когда $z=u$, то 3 корня кубическаго уравненія будутъ: I) $z=p=1$; II) $z=q=\frac{4+\sqrt{15}}{2}$; III) $z=r=\frac{4-\sqrt{15}}{2}$.

785.

Когда мы нашли p, q и r , то квадратные корни ихъ будутъ $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{2}$; \sqrt{r}

$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{2}$; выше же сего показано

было, что квадратной корень изъ $(a + \sqrt{b})$, положивъ $\sqrt{(aa - b)} = c$, изображается такъ $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, то въ нашемъ примѣрѣ имѣя $a=8$ и $\sqrt{b}=2\sqrt{15}$ и $b=60$, откуда $c=2$, получимъ мы $\sqrt{(8+2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, и $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$; и когда $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$ и $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$.

то четыре величины изображающія x будутъ слѣдующіе, зная что ихъ произведеніе должно быть положительное.

$$\text{I)} x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{II)} x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$$

$$\text{III)} x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{IV)} x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$$

Понеже въ квадратномъ уравненіи было $y = x + 2$, то 4 корня сего будутъ : I) $y = 3 + \sqrt{5}$; II) $y = 3 - \sqrt{5}$; III) $y = 1 + \sqrt{3}$; IV) $y = 1 - \sqrt{3}$.



ГЛАВА XVI.

О разрѣшеніи уравненій чрезъ приближеніе.

756.

Если уравнение не имѣетъ раціональныхъ корней, не смотря на то можно ли ихъ будещи изъяснить коренными знаками, или нѣтъ, какъ въ вышнихъ уравненіяхъ дѣлается, то должно довольствоваться изобрѣщеніемъ величины чрезъ приближеніе, такъ что къ точному знаменованію оныя всегда ближе подходить можно, то есть, до тѣхъ поръ, пока погрѣшность за ничто почтеться можетъ. На сей конецъ различныя изобрѣтены средства, изъ коихъ знаменѣйшія мы здѣсь изъяснить намѣрены.

787.

Первой спосо́бъ состои́тъ въ томъ, когда величина одного корня довольно уже близко къ почносипи подходитъ, какъ нѣтъ ежели извѣстно будетъ, что оной больше 4, а меньше 5, но тогда кладется величина сего корня $\equiv 4 + p$, гдѣ p дѣйствительно означенъ дробь, когда же p будетъ дробь меньше 1, то квадратъ ея pr долженъ быть гораздо меньше, а кубъ p^3 и слѣдующія степени будутъ уже и къ малы, что ихъ изъ выкладки опустить можно, потому что здѣсь ищется не самая величина p , но только ближайшая ей. И такъ когда дробь p ближайшая величина опредѣлена будетъ, то изъ того уже корень $4 + p$ гораздо точнѣе сыщется. Симъ образомъ опредѣлить можно корень еще точнѣе, употребляя предписанное дѣйствіе до нѣхъ поръ, пока къ правдѣ подойдетъ такъ близко, какъ пожелаешь.

И 3

788.

Сіе правило изъяснимъ мы самымъ легкимъ примѣромъ , и станемъ искать чрезъ приближеніе корень уравненія $xx=20$.

Здѣсь видно , что x больше 4 хъ , а меньше 5 или и для того положивъ $x=4+p$, будемъ $xx=16+8p+pp=20$; но поелику pp очень мало , то выпустимъ его изъ уравненія , чтобъ получить $16+8p=20$, или $8p=4$. откуда будемъ $p=\frac{1}{2}$ и $x=4\frac{1}{2}$, которой уже къ правдѣ гораздо ближе подходитъ ; посемъ положимъ еще $x=4\frac{1}{2}+p$, то видно , что p должна быть дробь гораздо меньше прежней , и слѣд. pp съ большимъ правомъ опущено быть можетъ ; почему $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$. или $9p=-\frac{1}{4}$, и $p=-\frac{1}{36}$. слѣд. $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$. Если бы понадобилось подойти къ правдѣ еще ближе , то положи $x=4\frac{17}{36}+p$, и будемъ $xx=20\frac{1}{36}+8\frac{17}{36}p=20$ и $8\frac{17}{36}p=-\frac{1}{36}$; умноживъ на 36 выдемъ $322p=-\frac{1}{36}$, $p=-\frac{1}{36\cdot 322}=-\frac{1}{11592}$, слѣд. $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{5479}{11592}$. Сіе число къ точному корню уже такъ блиско подходитъ ,

что

что погрѣшность за ничто почтеться можетъ.

759.

Дабы сіе показать вообще, то пусть предложено будетъ уравненіе $xx = a$, и извѣстно бы было, что x больше неже-
ли n , а меньше нежели $n + 1$; тогда положи $x = n + p$, такъ, что p дробь означаетъ, и слѣд. pp какъ очень малая дробь изъ уравненія отпадаетъ; чего ради получится $xx = nn + 2np = a$, слѣд. $2np = a - nn$ и $p = \frac{a - nn}{2n}$; почему $x = n + \frac{a - nn}{2n} = \frac{nn + a}{2n}$, и ежели n къ правдѣ уже блиско подходило, то новая величина $\frac{nn + a}{2n}$ будетъ еще ближе къ оной. Сію найденную величину положи опять мѣсто n , и подойдешь къ правдѣ еще ближе, и когда сію положишь еще разъ мѣсто n , то подойдешь уже несравненно ближе къ правдѣ. Симъ образомъ дѣйствіе сіе продолжать можно до тѣхъ поръ, какъ пожелаешь. Пусть будетъ наприм. $a = 2$, или ищется квадратной корень изъ 2: естьли уже найдена довольно

Н 4

блиско

блиско къ почному корню подходящая величина, которая положена n , по $\frac{np+a}{2n}$ дастъ еще точнѣйшую величину.

И такъ пусть будетъ. I) $n=1$, то будетъ $x=\frac{5}{2}$

$$\text{II) } n=\frac{5}{2} \text{ — — — } x=\frac{17}{12}$$

$$\text{III) } n=\frac{17}{12} \text{ — — — } x=\frac{577}{354}$$

Сія послѣдняя величина такъ блиско къ $\sqrt{2}$ подходитъ, что квадратъ ея $\frac{352609}{126400}$ только дробью $\frac{1}{126400}$ больше 2 хъ.

790.

Подобнымъ образомъ поступать надлежитъ ежели дано будетъ кубичес, или еще вышес уравненіе.

Пусть дано будетъ сіе кубичес уравненіе $x^3=a$, или ищется $\sqrt[3]{a}$, и пусть оной будетъ почти n , то положи $x=n+p$, опустивъ pp и вышнюю степень будетъ $x^3=3npr+n^3=a$, слѣдов.

$$3npr=a-n^3, \text{ и } p=\frac{a-n^3}{3n}, \text{ почему } x=\frac{2n^3+a}{3n}; \text{ и ежели } n \text{ уже близко къ } \sqrt[3]{a} \text{ под-}$$

подходитъ , то сія формула будетъ къ
оному еще ближе , а положивъ сію но-
вую величину мѣсто n , бу ешъ къ
правдѣ подходитъ несравненно ближе,
и сіе дѣйствіе продолжать можно по же-
ланію.

Пусть будетъ напр. $x^3 = 2$, или ище-
тся $\sqrt[3]{2}$, къ коему число n уже близ-
ко подходитъ , то формула $\frac{2n^3 + 2}{3nn}$ су-
дешъ къ нему еще ближе ,

положивъ I) $n = 1$ будетъ $x = \frac{4}{3}$

II) $n = \frac{4}{3}$ — — — $x = \frac{91}{72}$

III) $n = \frac{91}{72}$ — — — $x = \frac{162130896}{128634294}$

791.

Сей способъ находить корни чрезъ
приближеніе , можно употреблять съ ра-
внымъ успѣхомъ во вѣхъ уравненіяхъ.
На сей конецъ пусть дано будетъ гене-
ральносъ кубическое уравненіе $x^3 + axx + bx$
 $+ c = 0$, въ копоромъ n уже близко къ

И 5

корню

корню его подходитъ ; положи $x = n - p$, и когда p должна быть дробь , то pp и прочія вышшяя степени онаго изъ уравненія выдустивъ получатся $xx = nn - 2np$ и $x^3 = n^3 - 3np$, откуда происходитъ сіе уравненіе $n^3 - 3np + an - 2ap + bn - br + c = 0$, или $n^3 + an + bn + c = 3np + 2ap + br = (3n + 2a + b)p$, слѣдов $p = \frac{n^3 + an + bn + c}{3n + 2a + b}$, и такъ мѣсто x получимъ слѣдующее точнѣйшее знаменованіе: $x = n - \frac{n^3 + an + bn + c}{3n + 2a + b} = \frac{2n^3 + an - c}{3n + 2a + b}$; и еслили сія новая величина положится опять мѣсто n , то получится величина , которая къ правдѣ еще ближе подходитъ.

792.

Пусть будетъ напр. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, гдѣ $a = 2$, $b = 3$ и $c = -50$, слѣд. когда n уже близко къ корню подходитъ , то еще ближайшая величина будетъ $x = \frac{2n^3 + 2nn + 50}{3nn + 4n + 3}$; но знамено-

ваніе

ваніе $x=3$ уже довольно близко къ настоящему корню подходитъ , того ради положи $n=3$, и получится $x=\frac{14}{11}$, и если бы сію дробь положить еще вмѣсто n , то нашлася бы другая величина , къ точному корню гораздо ближе подходящая.

193.

Для вышшихъ степеней присовокупимъ здѣсь сей только примѣръ $x^5=6x+10$, или $x^5-6x-10=0$, гдѣ какъ видно 1 мала , а 2 велико. Пусть будетъ $x=n$, ближайшей величинѣ къ искомому корню, и положи $x=n+r$, то будетъ $x^5=n^5+5n^4r$, и слѣд. $n^5+5n^4r=6n+6r+10$, или $5n^4r-6r=6n+10-n^5$, откуда $r=\frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$; почему $x=\frac{4n^5+10}{5n^4-6}$,

положи теперь $n=1$, то будетъ $x=\frac{14}{-1}$

$=-14$, которая величина къ рѣшенію даннаго вопроса совсѣмъ не годится, сіе происходитъ по той причинѣ, что ближайшая величина корню n , была взята

очень

очень мала ; чего ради положи $n = 2$ и
будетъ $x = \frac{139}{74} = \frac{69}{37}$, которая дробь къ
правдѣ уже гораздо ближе подходитъ , и
если бы кто похотѣлъ трудъ на себя
принять , положишь дробь $\frac{69}{37}$ мѣсто n ,
то сыскалась бы величина къ точному
корню x уже несравненно близка.

794

Сие обыкновенное средство нахо-
дить корни уравненія чрезъ приближеніе,
во всѣхъ случаяхъ съ пользою употре-
блять можно.

Но сверхъ сего наміренія мы здѣсь
показать еще другое средство , которое
для легкости своей въ вычисленіи до-
стоинно примѣчанія. Основаніе онаго со-
стоитъ въ томъ , что для каждаго ура-
вененія надлежитъ сыскать рядъ чиселъ
какъ: a , b , c , d и пр. которые бы бы-
ли такою состоянія , что ежели каж-
дой членъ раздѣлится на послѣдующей ;
въ частномъ бы выходила величина кор-
ня

ня пѣмѣ аккуратнѣе , чѣмѣ далѣе сей рядѣ чиселѣ продолжать будешь.

Положимѣ , что въ ссмѣ ряду чиселѣ дошли мы уже до членовѣ: p, q, r, s, t и пр. по $\frac{q}{p}$ должно дать корень x уже довольно аккуратно, или $\frac{q}{p}$ должно быть почти равно x ; также и $\frac{r}{q} = x$, откуда мы чрезѣ умноженіе получаемѣ $\frac{r}{p} = xx$, и когда еще $\frac{s}{r} = x$, то также будетѣ $\frac{s}{p} = x^3$, потомѣ еще $\frac{t}{s} = x$ а $\frac{t}{p} = x^4$ и такѣ далѣе.

795.

Для извѣсненія сего начнемѣ съ квадратнаго уравненія $xx = x + 1$. Когда въ вышепомянутомѣ ряду находясь члены p, q, r, s, t и пр. по $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = xx$, и отсюда получаемѣ мы уравненіе $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, или $q + p = r$, также будетѣ $s = r + q$, и $t = s + r$, откуда мы познаемѣ, что каждый членѣ въ нашемѣ ряду есть сумма двухѣ предѣидущихѣ, почему помянутой рядѣ чиселѣ

можно

можно продолжать такъ далско, какъ похочется, ежели только два первые члена извѣстны будутъ, которые можно брать по изволенію. Чего ради положивъ ихъ 0, 1, получится рядъ чиселъ

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, и такъ далѣе. Въ семъ ряду каждой изъ отдаленныхъ членовъ раздѣленный на свой предъидущей, величину x тѣмъ точнѣе опредѣляетъ, чѣмъ далѣе рядъ продолженъ будетъ. Сначала ошибка, хотя и очень велика будетъ; однако она тѣмъ менше становится, чѣмъ далѣе рядъ продолжается. Сіи часті отъ часу къ правдѣ приближающіяся величины для x идутъ въ слѣдующемъ порядкѣ :

$$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89} \text{ и пр.}$$

изъ коихъ напр. $x = \frac{21}{13}$ даетъ $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{441}{169}$, и погрѣшность состоятъ только изъ дроби $\frac{1}{169}$, а слѣдующія дроби къ правдѣ еще ближе подходятъ.

796.

Разсмотримъ теперь также и сіе уравненіе $xx = 2x + 1$. Понсже завсегда $x = \frac{q}{p}$ и $xx = \frac{r}{p}$, то получимъ мы $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, или $r = 2q + p$. Отсюда знаемъ мы, что каждой членъ два раза взятой вмѣстѣ съ своимъ предвѣдущимъ даетъ слѣдующей членъ; чего ради начавъ опять съ 0, 1, получимъ слѣдующей рядъ:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 и пр. и искомая величина x слѣдующими дробями часъ отъ часу аккуратнѣе опредѣлился $x = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{17}{2}; \frac{29}{2}; \frac{70}{2}; \frac{169}{2}; \frac{408}{2}$ и пр. кои къ точной величинѣ $x = 1 + \sqrt{2}$ всегда приближаются, а отнявъ 1, слѣдующія дроби величину $\sqrt{2}$ даютъ часъ отъ часу точнѣе $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{17}{2}; \frac{29}{2}; \frac{70}{2}; \frac{169}{2}$ и проч. изъ коихъ квадратъ $\frac{99}{76} = \frac{9801}{5776}$ только $\frac{1}{4908}$ больше нежели 2.

797.

Въ уравненіяхъ вышшихъ степеней, сей способъ равнымъ образомъ упрощающъ можно, такъ ежели бы дано было сіе кубическое уравненіе :

 x^3

$x^2 = xx + 2x + 1$, то положивъ $x = \frac{q}{p}$,
 $xx = \frac{q^2}{p^2}$ и $x^2 = \frac{s}{p}$, получится $s = r + 2q$
 $+ p$; откуда видно, какъ изъ трехъ
 членовъ p , q и r слѣдующей находить
 должно, въ которомъ случаѣ начальные
 числа опять взять можно по изволению;
 почему будетъ у насъ ссй рядъ:

0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129 и пр.
 откуда за слѣдующіе дроби всегда акку-
 ратнѣе величину x опредѣляють:

$x = \frac{0}{0}$; $\frac{1}{0}$; $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{28}{13}$, $\frac{60}{28}$, $\frac{129}{60}$
 и пр. первыя изъ сихъ дробей ужасно
 разнятся отъ точнаго корня, но $x = \frac{60}{28}$
 $= \frac{15}{7}$ даетъ въ уравненіи $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{7348}{343}$
 разность $\frac{13}{343}$.

798.

Здѣсь надлежитъ примѣчать, что
 не во всякомъ уравненіи ссй способъ
 употреблять можно, особливо гдѣ впо-
 раго члена не находится, тамъ его упо-
 требить не лзя; ибо пусть будетъ напр.
 $xx = 2$, и положи $x = \frac{r}{p}$, и $xx = \frac{r^2}{p^2}$, то
 произойдетъ $\frac{r^2}{p^2} = 2$, или $r = 2p$, то есть,
 $r = 0q + 2p$, откуда произойдетъ ссй
 рядъ чиселъ:

1,

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324 и пр. изъ коего два послѣдніе члена даютъ $y = \frac{324}{144}$ и $x = \frac{5}{4}$, кошорая дробъ къ кубичному корню изъ 2 хъ довольно близко подходитъ; ибо кубъ $\frac{5}{4} = \frac{125}{64}$, а $2 = \frac{128}{64}$.

800.

При семъ способѣ еще примѣчать надлежитъ, что когда уравненіе имѣетъ раціональные корни, и начало ряда возмется такъ чпобъ оттуда вышли сіи корни, то каждой членъ онаго раздѣленъ будучи на свой предъидущей, дастъ томъ же точно корень.

Что бы сіе показатъ, то пусть дано будетъ уравненіе $xx = x + 2$, коего одинъ корень $x = 2$, и для составленія ряда чиселъ изъ даннаго уравненія дана будетъ формула $r = q + 2p$, и ежели начало его положится 1, 2, то получится рядъ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и пр. которой есть прогрессія геометрическая имѣющая знаменатель 2.

Тожс

Тоже самое явствуетъ изъ кубичнаго уравненія $x^3 = 3x^2 + 3x + 9$, котораго одинъ корень $x = 3$, и ежели начало ряда положишия 1, 3, 9, то изъ формулы $s = r + 3q + 9r$ найдешся рядъ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 ипр. которой будетъ опять прогрессія геометрическая имѣющая знаменателя 3.

801.

Ежели же ряда начало съ симъ корнемъ не сходно будетъ, то оштуда не слѣдуетъ, что чрезъ то всегда ближе къ нему подходить можно; ибо ежели уравненіе имѣетъ больше одного корня, то рядъ приближается всегда къ большому изъ оныхъ, а меньшаго иначе получить не лзя, какъ только когда начало ряда точно по оному разположится. Сіе примѣромъ лучше изъяснить можно,

Когда дано будетъ уравненіе $2x^2 = 4x - 3$, въ коемъ два корня суть $x = 1$ и $x = 3$, а формула для ряда чиселъ $r = 4q - 3r$, то положи начало ряда 1, 1, то

О 2

есть,

есть, для меншаго корня, и будетъ весь рядъ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, и пр. когда же начало ряда пололимся 1, 3, въ которомъ бѣдшей корень содержится, то весь рядъ будетъ :

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 и пр. въ которомъ всѣ члены корень 3 точно опредѣляютъ.

Если же начало ряда возмемся по изволению, такъ что въ немъ меньшей корень не точно содержится, то рядъ приближается всегда къ большому корню 3, какъ изъ слѣдующихъ рядовъ видно:

Начало 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364 и пр.

— — — 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365 и пр.

— — — 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095
и пр.

— — — 2, 1, -2, -11, -38, -118, -362, -1091,
-3278 и пр.

Гдѣ послѣдующіе члены раздѣлены будучи на предвѣдущіе всегда производятъ частыя, ближайшія большому корню, а меньшему никогда.

802.

Сей способъ можно употреблять и при такихъ уравненіяхъ, которыя бесконечно продолжаются. Въ примѣрѣ служить можетъ сѣ уравненіе:

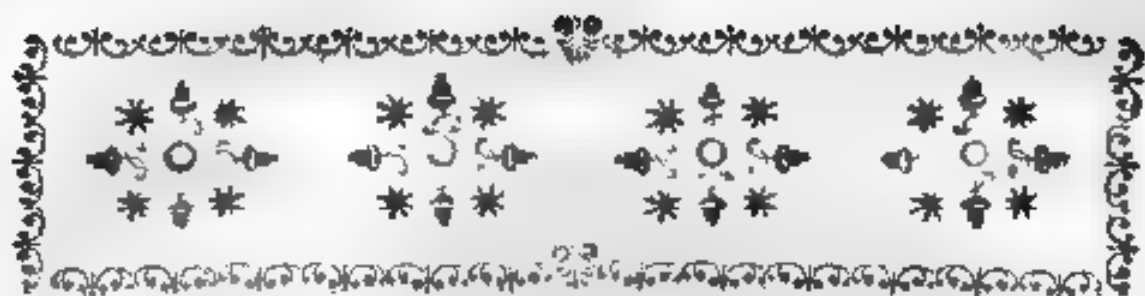
$$x = x + \frac{x}{x} + \frac{x}{x^2} + \frac{x}{x^3} + \frac{x}{x^4} + \text{и пр.}$$

для котораго рядъ чиселъ долженъ быть такого состоянія, чтобъ каждой въ немъ числѣ равенъ былъ суммѣ всѣхъ предвѣдущихъ, откуда произойдетъ рядъ 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, и пр. изъ чего видно, что самой большой корень сего уравненія будетъ точно $x = 2$, что также показано быть можетъ и симъ образомъ: раздѣли данное уравненіе на x , и получится

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \text{и проч.}$, что производитъ геометрическую прогрессию, коей сумма $= \frac{1}{x-1}$, такъ что $1 = \frac{1}{x-1}$ будучи умножено на $x-1$ дастъ $x-1=1$ и $x=2$.

Сверхъ сихъ двухъ способовъ находить корни уравненія чрезъ приближеніе, есть еще и другіе, но которые по большей части или пространны, или не генеральны. Предъ всѣми такими способами заслуживаетъ преимущество съ начала изъясненной, какъ таковой, который во всѣхъ уравненіяхъ съ желаемымъ успѣхомъ употребленъ быть можетъ; другой же напротивъ того требуетъ иногда въ уравненіи нѣкоторое приуготовленіе, безъ котораго и употребить его нельзя, какъ уже мы въ предложенныхъ здѣсь примѣрахъ показали.

Конецъ четвертой части объ алгебраическихъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніи.



ЧАСТЬ ПЯТАЯ

о неопредѣленной аналитикѣ.



ГЛАВА I

О разбѣшеніи такихъ уравненій, въ ко-
рыхъ больше нежели одно неизвѣстное
число находится.

804.

Изъ прежняго явствуетъ, какимъ
образомъ одно неизвѣстное число
изъ одного уравненія, два неизвѣст-
ныя изъ двухъ, три изъ трехъ, четыре изъ
четырехъ и такъ далѣе опредѣлить мо-
жно; такъ что всегда требуется столько
уравненій, сколько неизвѣстныхъ чиселъ

О 4

опре-

опредѣлить должно, и тогда самой вопросъ будетъ опредѣленнымъ.

Еслили же изъ вопроса меньше выдѣлъ уравненій, нежели сколько неизвѣстныхъ чиселъ, то будучи нѣкоторыя изъ нихъ неопредѣленными и оставляюща на наше произволеніе; почему такіе вопросы *неопредѣленными* называюща, и состояюща въ особливую аналитическую часть, которая *неопредѣленною Аналитическою* обыкновенно именуется.

805.

Понеже въ сихъ случаяхъ одно или больше неизвѣстныхъ чиселъ по произволу брасть можно, то имѣютъ здѣсь мѣсто многія рѣшенія.

Но обыкновенно присовокупляюща здѣсь еще сей договоръ, чтобы искомыя числа были цѣлыя, да припомъ и положительныя или по крайней мѣрѣ рациональныя, чрезъ что число всѣхъ возможныхъ рѣшеній чрезмѣрно ограничивается, такъ что нѣкоторыя не многія хотя часно же и бесконечно многія; но кои

не столь легко видѣть можно, имѣютъ мѣсто, а иногда и совсѣмъ ни одного не возможно: почему сія аналитики часть совсѣмъ особливые пріемы требуетъ и не мало служитъ къ изощренію разума начинающихъ и большее имъ проворство въ исчисленіи приноситъ.

806.

Начнемъ съ самаго легкаго вопроса и будемъ искать два числа, коихъ бы сумма равна была 10; при чемъ разумѣется, что сіи числа цѣлыя и положительныя быть должны.

Пусть оныя числа будутъ x и y , такъ что $x + y = 10$, откуда найдемъ $x = 10 - y$, и такъ y иначе опредѣлить нельзя, какъ только что оно цѣлое и положительное число быть должно, и по сему можно бы было взять вмѣсто y всѣ цѣлыя числа, отъ 1 безконечно многія; но понеже x также положительнымъ быть долженъ, то y больше 10 взять нельзя, потому что иначе былъ бы x

О 5

опри-

отрицательнымъ, и когда o также не долженъ входить въ выкладку, то самой большой y будетъ 9, ибо въ противномъ случаѣ былъ бы $x=0$; почему слѣдующія только рѣшенія мѣсто имѣютъ.

Когда $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, то $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$; но изъ сихъ 9 рѣшеній послѣднія 4 съ первыми 4мя одинаковы, и для того всѣхъ навсе 5 только разныхъ рѣшеній.

Еслили же бы потребны были 3 числа, коихъ бы сумма была 10, то надлежало бы только одно изъ найденныхъ здѣсь чиселъ раздѣлить еще на двѣ части, откуда вышло бы большее число рѣшеній.

807.

Понеже въ семъ никакой нѣтъ трудности, то приступимъ теперь къ нѣскольکو трудноватымъ вопросамъ.

Вопросъ. Раздѣлить 25 на двѣ части, изъ которыхъ бы одна на 2, а другая на 3 могла раздѣлиться?

Пусть

Пусть будетъ одна часть $2x$, а другая $3y$, то $2x + 3y = 25$, следовательно $2x = 25 - 3y$, раздѣливъ на 2 получимъ $x = \frac{25 - 3y}{2}$, откуда усматриваемъ мы во первыхъ, что $3y$ должны быть меньше 25 ми и по сему y не можетъ быть больше 8 ми; исключивъ цѣлыя числа сколько возможно, будетъ $x = \frac{25 + 1 - 2y - y}{2}$, или $x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}$: и такъ $1 - y$, или $y - 1$ на 2 дѣляться должны, чего ради положи $y - 1 = 2z$, то $y = 2z + 1$ будетъ $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$, а понеже y не болѣе 8 ми быть долженъ, то вмѣсто z никакихъ другихъ чиселъ взять не можно, какъ только тѣ кои $2z + 1$ не больше 8 ми составляютъ, следовательно z долженъ быть меньше 4 хъ, и по сему z не больше 3 хъ взять можно, откуда слѣдуютъ рѣшенія:

положивъ	$z = 0$	$z = 1$	$z = 2$	$z = 3$
будетъ	$y = 1$	$y = 3$	$y = 5$	$y = 7$
и	$x = 11$	$x = 8$	$x = 5$	$x = 2$

И такъ искомыя двѣ части будутъ слѣдующія: I) $22+3$; II) $16+9$; III) $10+15$, IV) $4+21$.

808.

Вопросъ. Раздѣлить 100 на 2 части, такъ что первая на 7, а другая на 11 могла раздѣлиться?

Пусть будетъ первая $7x$, а другая $11y$, то должно $7x+11y=100$, откуда $x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}=14$

$-y+\frac{2-4y}{7}$; и такъ $2-4y$, или $4y-2$, должны дѣлиться на 7, а когда $4y-2$ на 7 могутъ раздѣлиться, то и половина ихъ $2y-1$ также раздѣлится, чего ради положи $2y-1=7z$, или $2y=7z+1$: будетъ $x=14-y-2z$; но когда $2y=7z+1=6z+z+1$, выйдетъ $y=3z+\frac{z+1}{2}$.

Положивъ теперь $z+1=2u$, или $z=2u-1$ будетъ $y=3z+u$. Теперь вмѣсто u можно взять каждое цѣлое число, по которому бы ни x ни y отрицательными не были,

были, то получится $y=7u-3$, а $x=19-11u$. По первой формулѣ $7u$ должно быть больше $3x$, а по второй, $11u$ меньше 19 или, или u меньше нежели $\frac{19}{11}$, такъ что u не можетъ быть 2 , но оно также и 0 быть не можетъ, то остается одна только его величина $u=1$, откуда получится $x=8$ и $y=4$, слѣдовательно обѣ искомыя части ста будутъ Іа 56, а ІІа 44.

809.

Вопросъ Раздѣлить 100 на двѣ шакія части, что ежели первую раздѣлить на 5, тобѣ осталось 2, а когда другую раздѣлишь на 7, въ остаткѣ чтобѣ было 4?

Когда отъ раздѣленія первой части на 5 въ остаткѣ должны быть 2, то положи оную $5x+2$, и понеже другая часть раздѣленная на 7 должна дать остатокъ 4, то пусть она будетъ $7y+4$, и такъ $5x+7y+6=100$, или $5x=94-7y=90+4-5y-2y$, почему $x=18-\frac{2y+4}{5}$.
слѣдо-

слѣдовательно $4 - 2y$, или $2y - 4$, или половина сего $y - 2$ должна раздѣлиться на 5; чего ради положи $y - 2 = 5z$, или $y = 5z + 2$ будетъ $x = 16 - 7z$, откуда явствуется, что $7z$ должны быть меньше 16ти, слѣдовательно z меньше нежели $\frac{16}{7}$ и такъ не больше 2хъ, почему имѣемъ мы здѣсь 3 рѣшенія;

Iе $z = 0$ даетъ $x = 16$ и $y = 2$, слѣдовательно обѣ искомыя части будутъ $82 + 18$.

IIе $z = 1$ будетъ $x = 9$ и $y = 7$, слѣдовательно обѣ части $47 + 53$.

IIIе $z = 2$ даетъ $x = 2$ и $y = 12$, почему обѣ части $12 + 88$.

810.

Вопросъ. Двѣ крестьянки имѣютъ вмѣстѣ 100 яицъ, одна говоритъ, ежели я свои по 8 цѣпашъ стану, то останется у меня 7, другая говоритъ, а когда я свои по 10 цѣпашъ буду, то и у меня въ остаткѣ также будетъ 7: спрашивается сколько каждая яицъ имѣла?

Понеме

Понеже число первой раздѣленное на 8 даетъ въ остатокъ 7, а число другой раздѣленное на 10 также даетъ остатокъ 7, то положи число первой $= 8x + 7$, а другой $= 10y + 7$, то будетъ $8x + 10y + 14 = 100$, или $8x = 86 - 10y$, или $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$; откуда найдемъ $x = 10 - y + \frac{3-y}{4}$; и такъ $3 - y$, или $y - 3$ на 4 дѣлится должно, чего ради положи $y - 3 = 4z$, будетъ $y = 4z + 3$ и $x = 10 - 4z - 3 = 7 - 4z$, слѣдовательно $5z$ должны быть меньше нежели 7 и такъ z меньше 2хъ, почему слѣдующія два рѣшенія выходятъ :

Ис $z = 0$ даетъ $x = 7$ и $y = 3$, по сему у первой крестьянки было 63 яйца, а у другой 37.

Ис $z = 1$ даетъ $x = 2$ и $y = 7$ и такъ у первой было 22 яйца а у другой 77.

811.

Вспросъ. Въ нѣкоторой компаніи мужчины и женщины издержали вмѣстѣ 1500 копѣекъ, каждой мужчина заплатилъ 19 копѣекъ, а каждая женщина 13 коп. спрашивается

шивается сколько было мужчинъ и сколько женщинъ ?

Пусть будетъ число мужчинъ $= x$, а женщинъ $= y$, то получится сѣе уравненіе $19x + 13y = 1000$; изъ сего найдется $13y = 1000 - 19x$ или $13y = 988 - 12 - 13x - 6x$, слѣдовательно $y = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$, и такъ $12 - 6x$ или $6x - 12$ и шестая также она-го часть $x - 2$ должна дѣлиться на 13, то положи $x - 2 = 13z$ будетъ $x = 13z + 2$ и $y = 76 - 13z - 2 - 6z$, или $y = 74 - 19z$, почему z долженъ быть меньше нежели $\frac{74}{19}$ и слѣдовательно меньше 4 хъ, откуда слѣдующія 4 рѣшенія мѣсто имѣютъ :

Іе $z = 0$ даетъ $x = 2$ и $y = 74$ такимъ образомъ было двосъ мужчинъ и 74 женщины, тѣ за плапили 38 копѣекъ, а сіи 962 копѣйки.

Іе $z = 1$ даетъ число мужчинъ $x = 15$, а число женщинъ $y = 55$; тѣ издержали 285 коп., а сіи 715 коп.

Іе $z = 2$ даетъ число мужчинъ $x = 28$, а число женщинъ $y = 36$; тѣ испрашили 532 коп., а сіи 468 коп.

IVе $z=3$ дастъ число мужчинъ $x=41$,
а число женщинъ $y=17$, тѣ заплати-
ли 779 коп.; а сіи 221. коп.

812.

Вопросъ. Одинъ дворянинъ купилъ
лошадей и быковъ вмѣстѣ за 1770 р. па-
леровъ, за каждую лошадь платилъ онъ
31 шал., а за каждого быка 21 р.палеръ,
Спрашивается сколько было лошадей и
сколько быковъ?

Пусть будетъ число лошадей x ; а
быковъ y , то должно быть $31x+21y$
 $=1770$, или $21y=1770-31x=1764-10x$
 $-21x-10x$, слѣдовательно $y=84-x$
 $+\frac{6-10x}{21}$. По сему должно $10x-6$, или
также половина сего $5x-3$ раздѣлиться на 21.
Положи $5x-3=21z$, будетъ $5x=21z+3$,
слѣдовательно $y=84-x-2z$, но $x=\frac{21z+3}{5}$
или $=4z+\frac{z+3}{5}$; вмѣсто $z+3$ возми $5u$
будетъ $z=5u-3$, $x=21u-12$ и $y=84$
 $-21u+12-10u+6=102-31u$, и по сему
 u должно быть больше нежели, 0; однако

П

мень-

меньше $4x$, откуда получаемъ мы сіи 2 рѣшенія.

Ie $u=1$ даетъ число лошадей $x=9$, а быковъ $y=71$, шѣ стоили 279 рейхс-талер., а сіи 1491, вмѣстѣ 1770 р.талер.

Iie $u=2$ даетъ число лошадей $x=30$, а быковъ $y=40$, шѣ стояли 930 р.тал., а сіи 840, вмѣстѣ 1770 рейхсшталер.

IIie $u=3$ даетъ число лошадей $x=51$, а быковъ $y=9$, шѣ стоили 1581 р.тал., а сіи 189, вмѣстѣ 1770 рейхссталеровъ.

813.

Предложенные по сіе мѣсто вопросы ведущъ насъ къ уравненію $ax+by=c$, гдѣ a, b и c цѣлыя и положительныя числа значащъ, и вмѣсто x и y также цѣлыя и положительныя числа требуются. Но если b будетъ отрицательное, и уравненіе такой видъ приметъ $ax=by+c$, то будущъ вопросы совсѣмъ

совсѣмъ особливаго роду и могутъ имѣть безконечное множество рѣшеній , для которыхъ способъ надлежитъ изъяснить еще въ сей главѣ. Наилегчайшіе сего рода вопросы суть такіе : найди два числа, которыхъ бы разность была 6 ?

Положи меньшее $= x$, а большее $= y$ будетъ $y - x = 6$, слѣдовательно $y = 6 + x$; здѣсь ничто не препятствуетъ брать вмѣстѣ x всѣ возможные цѣлыя числа , и какія бы взяты ни были , то всегда y будетъ 6 тью больше; возьми наприм. $x = 100$ будетъ $y = 106$, откуда явствуетъ , что безконечно многія рѣшенія быть могутъ.

814.

По семъ слѣдуютъ вопросы , гдѣ $c = 0$ и ax одному только by равно , и.е. ищется число , которое бы какъ на 5 , такъ и на 7 могло раздѣляться ; положи сіе число $= N$, то надлежитъ быть сперва $N = 5x$, потому что число N на 5 дѣлится должно. а потомъ $N = 7y$, понеже сіе число также и на 7 дѣлится-

ся долженствуемъ. Отсюда получится $5x = 7y$, слѣдовательно $x = \frac{7}{5}y$; но понеже 7 на 5 раздѣлиться не могутъ, то должно y на оное раздѣлиться, и такъ положи $y = 5z$, будетъ $x = 7z$; слѣдовательно искомое число $N = 35z$, гдѣ вмѣсто z каждое цѣлое число брать можно, такъ что вмѣсто N безконечно многія числа найдутся, кои суть 35, 70, 105, 175, 210 и проч.

Естьли бы еще сверхъ сего число N на 9 раздѣлить можно было, то было бы сперва $N = 35z$, а потомъ $N = 9u$, и отсюда $u = \frac{35z}{9}$ по чему видно, что z на 9 дѣлиться долженъ, и такъ пусть будетъ $z = 9r$, будетъ $u = 35r$, а искомое число $N = 315r$.

815.

Больше трудности бываетъ, ежели число c не 0, такъ когда бы было $5x = 7y + 3$. Сіе уравненіе выходитъ, когда такое число N ищется, которое бы сперва на 5 дѣлилось, а еслили оно же раздѣ-

раздѣлится на 7, то осталось бы 3. Ибо тогда надлежитъ быть $N = 5x$, а потомъ $N = 7y + 3$, и для того будетъ $5x = 7y + 3$, слѣдовательно $x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$; положивъ $2y + 3 = 5z$ будетъ $x = y + z$, но $2y + 3 = 5z$, или $2y = 5z - 3$ будетъ $y = \frac{5z-3}{2}$, или $= 2z + \frac{z-3}{2}$; возми теперь $z - 3 = 2u$ будетъ $z = 2u + 3$, $y = 5u + 6$ и $x = y + z = 7u + 9$, слѣдовательно искомое число $N = 35u + 45$, гдѣ вмѣсто u всѣ цѣлыя числа взяты быть могутъ, да и самыя отрицательныя; чтобъ только N было положительное, что учинится здѣсь ежели $u = -1$; ибо тогда выйдетъ $N = 10$, слѣдующія же числа получаются, когда къ оному завсегда придавать будешь 35, и по сему искомыя числа суть 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220 и прочая.

816.

Рѣшеніе такихъ вопросовъ основано на содержаніи обоихъ чиселъ, на которыя дѣлится должно, и по свойству оныхъ рѣшеніе бываетъ иногда короче,

П 3

иногда

иногда пространнѣе; слѣдующей коронкой разрѣшится.

Найти число, которое когда раздѣлится на 6, останется 6, а раздѣливъ оное на 13 въ остаткѣ будетъ 3?

Пусть будетъ сѣе число N , по первымъ $N = 6x + 2$, а по вторымъ $N = 13y + 3$, и такъ $6x + 2 = 13y + 3$, и $6x = 13y + 1$, откуда $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$; положи $y + 1 = 6z$, получивъ $y = 6z - 1$ и $x = 2y + 2 = 12z - 2$, слѣдовательно искомое число будетъ $N = 78z - 10$, и такія числа будутъ слѣдующія: 68, 146, 224, 302, 380 и проч., которыя идущъ въ арифметической прогрессіи, коей разность есть $78 = 6 \cdot 13$, и такъ ежели одно изъ сихъ чиселъ будетъ извѣстно, по всѣ прочія легко найдутся; ибо надлежитъ только къ онымъ прибавить всегда 78, или изъ онаго вычитатьъ сколько возможно будетъ.

817.

Труднѣе сего примѣръ слѣдующей бытъ можетъ: сыскать число N , которое

рое будучи раздѣлено на 39 дастъ въ остатокъ 16, а на 56 раздѣленное дастъ остатокъ 27

Воисрвыхъ должно быть $N = 39p + 16$, а попомъ $N = 56q + 27$, откуда выдешъ $39p + 16 = 56q + 27$, или $39p = 56q + 11$ и $p = \frac{56q+11}{39} = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$, такъ, что $r = \frac{17q+11}{39}$, откуда будетъ $39r = 17q + 11$, и $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17} = 2r + s$, такъ что $s = \frac{5r-11}{17}$, или $17s = 5r - 11$; по сему будетъ $r = \frac{17s+11}{5} = 3s + \frac{s+11}{5} = 3s + t$, такъ что $t = \frac{s+11}{5}$, и ии $5t = 2s + 11$, слѣдовательно будетъ $s = \frac{5t-11}{2} = 2t + \frac{t-11}{2} = 2t + u$, такъ что $u = \frac{t-11}{2}$ и $t = 2u + 11$; когда теперь больше уже дробей не попадется, то можно взять u по изволснїю, и отсюда наизворотъ получасмъ мы слѣдующїя опредѣленїя :

$$t = 2u + 11$$

$$s = 2t + u = 5u + 22$$

$$r = 3s + t = 17u + 77$$

П 4

$$q = 2r$$

$$q = 2r - 1 \quad s = 39u + 176$$

$$p = q + r = 56u + 253$$

и наконецъ $N = 39.56u + 9883$.

Но что бы самое меньшее число вмѣсто N найти, то положи $u = -4$ будетъ $v = 1147$, положивъ $u = x - 4$ будетъ $N = 2184x - 8736 + 9883$, или $N = 2184x + 1147$. Сии числа дѣлаютъ арифметическую прогрессію, которой первой членъ есть 1147, а разность $= 2184$, самыя же числа будутъ 1147, 3331, 5515, 7699, 9883 и проч.

818.

Для упражненія присоединимъ еще нѣсколько примѣровъ.

Вопросъ. Въ одной компаніи были мужчины и женщины; каждой мужчина издержалъ 25, каждая женщина 16 коп. и нашлось послѣ, что женщины вмѣстѣ одною копѣйкою больше заплатили, нежели мужчины, спрашивается сколько было мужчинъ и женщинъ?

поло-

Положимъ число женщинъ было $= p$, а мужчинъ $= q$, то женщины издержали 16р, а мужчины 25q: чего ради должно быть

$$16p = 25q + 1, \text{ отсюда найдемся } p = \frac{25q + 1}{16}$$

$$= q + \frac{9q + 1}{16} = q + r, \text{ такъ что } r = \frac{9q + 1}{16},$$

$$\text{следовательно } q = \frac{16r - 1}{9} = r + \frac{7r - 1}{9}$$

$$= r + s, \text{ такъ что } s = \frac{7r - 1}{9}, \text{ или } 9s = 7r - 1;$$

$$\text{откуда } r = \frac{9s + 1}{7} = s + \frac{2s + 1}{7} = s + t,$$

$$\text{такъ что } t = \frac{2s + 1}{7} \text{ или } 7t = 2s + 1,$$

$$\text{следовательно } s = \frac{7t - 1}{2} = 3t + \frac{t - 1}{2}$$

$$= 3t + u, \text{ такъ что } u = \frac{t - 1}{2}, \text{ или } 2u = t - 1,$$

по чему $t = 2u + 1$, отсюда наизворотъ получаемъ мы

$$t = 2u + 1$$

$$s = 3t + u = 7u + 3$$

$$\text{П } 5$$

$$r = s$$

$$r = s + t = 9u + 4$$

$$q = r + s = 16u + 7$$

$$p = q + r = 25u + 11 \text{ по сему было}$$

женщинъ $= 25u + 11$, а мужчинъ $= 16u + 7$, гдѣ вмѣсто u , всякое цѣлое число взять можно: меньшія числа съ слѣдующими будутъ такія:

число женщинъ $= 11, 36, 61, 86, 111$ и пр.

— мужчинъ $7, 23, 39, 55, 71$ и пр.

по первому рѣшенію въ самыхъ меньшихъ числахъ женщины издержали 176 коп., а мужчины 175 коп., слѣдовательно женщины одною копѣею больше изтрапили, нежели мужчины.

819.

Вопросъ. Нѣкто купилъ лошадей и быковъ, за каждую лошадь платилъ 31 рейхсталеръ, а за каждого быка 20 р. талеровъ, и нашлось, что всѣ быки вмѣстѣ 7мью р. талерами стоили больше, нежели лошади. Спрашивается сколько было быковъ и лошадей?

Пусть

Пусть будетъ число быков $b=p$, а лошадей $=q$, по должно $20p = 31q + 7$,

откуда $p = \frac{31q + 7}{20} = q + \frac{11q + 7}{20} = q + r$,

по сему $20r = 11q + 7$, и $q = \frac{20r - 7}{11} = r$

$+ \frac{9r - 7}{11} = r + s$, по сему $11s = 9r - 7$

и $r = \frac{11s + 7}{9} = s + \frac{2s + 7}{9} = s + t$, по се-

му $9t = 2s + 7$ и $s = \frac{9t - 7}{2} = 4t + \frac{t - 7}{2}$

$= 4t + u$, по сему $2u = t - 7$

и $t = 2u + 7$

$$s = 4t + u = 9u + 28$$

$$r = s + t = 11u + 35$$

$$q = r + s = 20u + 63 \text{ число лошадей,}$$

$$p = q + r = 31u + 98 \text{ число быков.}$$

Отсюда

Отсюда найдутся меньшія положительныя числа, вмѣсто p и q , когда положится $n = -3$, большія же числа увеличиваются въ арифметической прогрессіи, какъ слѣдующіе :

число быковъ 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191
222, 253 и проч.

число лошадей 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123
143, 163, и проч.

820.

Когда мы въ семъ примѣрѣ рассмотримъ, какимъ образомъ буквы p и q изъ слѣдующихъ опредѣляются, то легко усмотрѣть можно, что сіе ошѣ содержанія чиселъ 31 и 29 зависить, а особливо на томъ содержаніи, по которому обыкновенно ищутъ самаго большаго общаго сихъ обѣихъ чиселъ дѣлителя, какъ изъ слѣдующаго явствуетъ :

$$\begin{array}{r}
 20 \overline{) 31} \quad 1 \\
 \underline{20} \\
 11 \overline{) 20} \quad 1 \\
 \underline{11} \\
 9 \overline{) 11} \quad 1 \\
 \underline{9} \\
 2 \overline{) 9} \quad 4 \\
 \underline{8} \\
 1 \overline{) 2} \quad 2 \\
 \underline{2}
 \end{array}$$

Здѣсь видно , что частныя числа въ слѣдующихъ другъ за другомъ опредѣленіяхъ буквъ, *p, q, r, s* и проч. выходятъ: и съ первою буквою на правой рукѣ связываются , а послѣдняя остается всегда одинака ; въ послѣднемъ же уравненіи выходитъ прежде всѣхъ число 7 и припомъ съ знакомъ $+$ пошому, что послѣднее опредѣленіе есть простое. Еслии же бы число оныхъ было четное, тогда бы -7 , поставишь надлежало. Сіе будетъ яснѣе изъ слѣдующей таблички , гдѣ напередъ

354 О НЕОПРЕДѢЛЕННОЙ

передѣ раздробленіе чиселъ 31 и 20, а попомѣ опредѣленія буквъ p, q, r и пр. представлены.

$$\begin{array}{l|l} 31 = 1. 20 + 11 & p = 1. q + r \\ 20 = 1. 11 + 9 & q = 1. r + s \\ 11 = 1. 9 + 2 & r = 1. s + t \\ 9 = 4. 2 + 1 & s = 4. t + u \\ 2 = 2. 1 + 0 & t = 2u + \dots \end{array}$$

821.

По сему способу представленъ быть можетъ прежней примѣръ въ 14 статьѣ, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{l|l} 56 = 1. 39 + 17 & p = 1. q + r \\ 39 = 2. 17 + 5 & q = 2. r + s \\ 17 = 3. 5 + 2 & r = 3. s + t \\ 5 = 2. 2 + 1 & s = 2. t + u \\ 2 = 2. 1 + 0 & t = 2u + 1x \end{array}$$

822.

Симъ образомъ въ состояніи мы рѣшить всѣ такіе примѣры вообще.

Пусть

Пусть будетъ дано сѣ уравненіе $br = aq + n$, гдѣ a , b и n извѣстны; здѣсь поже дѣйствіе производить надлежитъ, какъ будто бы найши должно было самаго большаго общаго дѣлителя чиселъ a и b , изъ коихъ p и q , чрезъ слѣдующія буквы опредѣлены будутъ, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{l|l} \text{пусть будетъ } a = Ab + c & p = Aq + r \\ b = Bc + d & q = Br + s \\ c = Cd + e & r = Cs + t \\ d = De + f & s = Dt + u \\ e = Ef + g & t = Eu + v \\ f = Fg + o & u = Fv + n \end{array}$$

Здѣсь въ послѣднемъ опредѣленіи берется $+n$, когда число опредѣленій нечетное; напроотивъ того $-n$, ежели оно будетъ четное. Такимъ образомъ можно теперь всѣ такіе вопросы рѣшить весьма скоро, изъ коихъ мы предложимъ нѣкоторыя для примѣру.

823.

Вопросъ. Сыскать число, которое когда раздѣлится на 11, дастъ въ остаткѣ

кѢ 3. а раздѣленное на 19, дастъ остатокъ 5 ?

Пусть будетъ сіе число N , то во-первыхъ $N = 11p + 3$, а потомъ также $N = 19q + 5$: чего ради будетъ $11p + 3 = 19q + 5$, или $11p = 19q + 2$, откуда слѣдующая составитъ табличка:

$$\begin{array}{l|l} 19 = 1 \cdot 11 + 8 & p = q + r \\ 11 = 1 \cdot 8 + 3 & q = r + s \\ 8 = 2 \cdot 3 + 2 & r = 2s + t \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 & s = t + u \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0 & t = 2u + 2 \end{array}$$

гдѣ u по изволенію взять можно, а отсюда уже обратнымъ порядкомъ предъидущія буквы опредѣляются, какъ слѣдуетъ:

$$t = 2u + 2$$

$$s = t + u = 3u + 2$$

$$r = 2s + t = 8u + 6$$

$$q = r + s = 11u + 8$$

$$p = q + r = 19u + 14$$

отсюда

отсюда получается искомое число $N = 209u + 157$ и такъ самое меньшее число вмѣсто N есть 157.

824.

Вопросъ. Ищется число N , которое какъ и прежде раздѣленное на 11 даетъ въ остаткѣ 3, а раздѣленное на 19 даетъ остатокъ 5, и еслии оно же раздѣлится на 29 тобѣ осталось 10?

По послѣднему положенію должно быть $N = 29p + 10$ и когда первые два договора уже вычислены, то изъ оныхъ быть надлежитъ, какъ уже выше найдено $N = 209u + 157$, вмѣсто чего поставимъ мы $N = 209q + 157$, чего ради будетъ $29p + 10 = 209q + 157$ или $29p = 209q + 147$, откуда слѣдующее дѣйствіе предпріять надлежитъ:

$209 = 7 \cdot 29 + 6$	$\left. \begin{array}{l} 29 = 4 \cdot 6 + 5 \\ 6 = 1 \cdot 5 + 1 \\ 5 = 5 \cdot 1 + 0 \end{array} \right\} \text{слѣд:}$	$p = 7 \cdot q + r$
		$q = 4 \cdot r + s$
		$r = 1 \cdot s + t$
		$s = 5 \cdot t - 147.$
Томъ II.	p	Оп.

Отсюда возвращаемся назадъ слѣдующимъ образомъ.

$$s = 5t - 147$$

$$r = s + t = 6t - 147$$

$$q = 4r + s = 29t - 735$$

$$p = 7q + r = 209t - 5292$$

И такъ $N = 6061t - 153458$, самое меньшее число найдется, когда положимъ $t = -26$, тогда будетъ $N = 4128$.

825.

Здѣсь примѣчать надлежитъ, что ежели такое уравненіе такъ, $br = aq + n$ разрѣшить должно будетъ, то оба числа a и b общаго дѣлителя кромѣ 1 цы имѣть не должны; ибо въ противномъ случаѣ былъ бы вопросъ невозможной, ежели бы число n тогожъ общаго дѣлителя не имѣло. Такъ когда на прим. $9r = 15q + 2$, гдѣ 9 и 15 общаго дѣлителя 3 имѣютъ, но на котораго 2 раздѣлиться не можетъ, того ради не лзя рѣшить сего вопроса, потому что $9r - 15q$ завсегда на 3 раздѣлится и слѣдовательно ни когда 2 быть

ибо ζ неопмѣнно цѣлое число быть должно ; и такъ видно, что такіе вопросы по ихъ свойству не возможны.



ГЛАВА II.

О правилѣ такъ называемомъ слѣпомъ, гдѣ изъ двухъ уравненій 3 или больше неизвѣстныхъ чиселъ опредѣляются.

827.

Въ предѣдущей главѣ видѣли мы , ка-кимъ образомъ изъ одного уравненія два неизвѣстныхъ числа опредѣлять должно, такъ чтобы оныя были цѣлыя и положи-тельныя . Но ежели предложены бу-дутъ два уравненія , и вопросъ должнъ быть неопредѣленной, то надлежитъ бытъ больше , нежели двумъ неизвѣстнымъ числамъ ; такіе вопросы случают-ся въ простыхъ ариѳметическихъ книгахъ и рѣшаются по правилу слѣпому , ко-торого основаніе показать мы здѣсь на-мѣрены.

828.

828.

Начнемъ съ самаго примѣра.

Вопросъ. 30 человекъ мужчинъ, женщинъ и робятъ издержали въ практирѣ 50 рейхсталеровъ, каждой мужчина заплапилъ 3 р. талера, каждая женщина 2 р. талера, каждой ребенокъ 1 р. талеръ. Спрашивается сколько было мужчинъ, женщинъ и робятъ?

Пусть будетъ число мужчинъ $= p$, женщинъ $= q$, а робятъ $= r$, то получаются слѣдующія два уравненія: I) $p + q + r = 30$; II) $3p + 2q + r = 50$, изъ коихъ 3 буквы p , q и r въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ опредѣлять должно. Изъ перваго уравненія будетъ $r = 30 - p - q$; чего ради $p + q$ должны быть меньше 30 пи. Сію величину поставивъ вмѣсто r въ другомъ уравненіи выдстъ $2p + q + 30 = 50$, слѣдовательно $2p + q = 20$; и такъ $q = 20 - 2p$, а $p + q = 20 - p$, что само по себѣ меньше 30 пи, теперь вмѣсто p всѣ числа брать можно, кои не больше 10 пи, по чему слѣдующія выхоятъ рѣшенія.

Р 3

число

число мужчин $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$,
 — женщин $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0$,
 — и ребяти $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$,
 отбросивъ первыя и послѣднія, оста-
 нутся еще 9 истинныхъ рѣшеній.

829.

Другой вопросъ. Нѣкто купилъ 100
 разнаго рода скотины, свиней, козъ и
 барановъ за 100 рейхсталеровъ, за одну
 свинью давалъ $3\frac{1}{2}$ р. талеровъ, за козу $1\frac{1}{2}$
 р. талер., за барана $\frac{1}{2}$ р. тал. спрашивается,
 сколько каждаго роду было?

Пусть будетъ число свиней $= p$,
 козъ $= q$, барановъ $= r$, то выдущъ
 слѣдующія два уравненія.

I. $p + q + r = 100$; II) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r = 100$.
 Сіе послѣднее уравненіе для из-
 бѣжанія дробей помножь на 6, выдѣлѣ
 $21p + 8q + 3r = 600$, изъ перваго уравне-
 нія будетъ $r = 100 - p - q$, котораго вели-
 чину поставивъ во второмъ уравненіи,
 получится $18p + 5q = 300$, или $5q = 300$
 $- 18p$ и $q = 60 + \frac{12}{5}p$, слѣдовательно $18p$
 дол.

должны на 5 раздѣлиться, или 5 какъ мно-
жителя въ себѣ заключать должны, и такъ
положи $p = 5s$ будетъ $q = 60 + 18s$ и
 $r = 13s + 40$, гдѣ вмѣсто s произвольное
цѣлое число ваять можно, но такъ
чтобъ q не было отрицательнымъ; чего
ради s не больше 3хъ быть долженъ, и
слѣдовательно когда о также исключает-
ся, то слѣдующія только 3 рѣшенія
мѣсто имѣютъ, а именно:

когда	$s =$	1,	2,	3
будетъ	$p =$	5,	13,	15
	$q =$	42,	24,	16
	$r =$	53,	66,	79.

830.

Когда кто такіе примѣры самъ
предлагать пожелаетъ, то прежде всего
на то смотрѣть надлежитъ, чтобъ бы-
ли оныя возможны, а что бы сіе узнать,
то надлежитъ примѣчать слѣдующее:

Пусть будутъ оба уравненія, ка-
кіе мы по сіе мѣсто имѣли, такъ пред-

Р 4

став-

спавлены Ie) $x + y + z = a$, II) $fx + gy + bz = b$, гдѣ f, g, b , такъ какъ a и b извѣстны; пусть теперь между числами f, g и b первое будетъ наибольшее, а b наименьшее; когдажъ $x + y + z = a$, то $fx + fy + fz = fa$, а $fx + gy + bz$ больше нежели $fx + gy + bz$, по чему fa должно быть больше нежели b , или b меньше нежели fa ; а $bx + by + bz = ab$ и $bx + by + bz$ заподлинно меньше нежели $fx + gy + bz$, то и ab должно быть меньше нежели b , или b больше нежели ab . Слѣдовательно когда число b , не меньше fa и притомъ не больше ab , то вопросъ завсегда не возможной.

Сей договоръ обыкновенно также предлагается и слѣдующимъ образомъ: чтобъ число b содержалось въ предѣлахъ fa и ab , сверхъ сего чтобъ оно не очень близко подходило къ обоимъ предѣламъ; ибо иначе остальные буквы опредѣлены быть не могутъ.

Такъ

Такъ въ прежнемъ примѣрѣ, гдѣ $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, предѣлы были 350 и 50, еслили бы теперь захотѣли положить $b = 51$ вмѣсто 100, то вышли бы уравненія $x + y + z = 100$ и $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 51$, здѣсь помноживъ на 6 будемъ $21x + 8y + 3z = 306$, возми первое уравненіе 3жды, получится $3x + 3y + 3z = 300$, которое изъ прежняго вычли, останется $18x - 5y = 6$, кое какъ сразу видно, невозможно; потому что x и y цѣлыя числа быть должны.

831.

Сіе правило нужно монетныхъ и золотыхъ дѣлъ мастерамъ, когда они хотятъ изъ трехъ или больше родовъ серебра, что нибудь здѣлать, какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуетъ.

Вопросъ. Одинъ монетной мастеръ имѣетъ тройное серебро, первое 14 лотовое, другое 11 лотовое и третіе 9 лотовое, а должно ему здѣлать вещь

р 5

вѣсомъ

вѣсомъ вѣ 30 марокъ , которая должна быть 12 лотовая.

Спрашивается сколько марокъ каждого серебра взять ему надлежитъ ?

Положимъ что взял онъ изъ перваго серебра x марокъ , изъ другаго y , а изъ третьяго z марокъ , то должно быть $x + y + z = 30$, что составляетъ первое уравненіе ; потому каждая марка перваго сорта содержитъ 14 лотовъ хорошаго серебра , то x марокъ содержатъ будутъ $14x$ лотовъ серебра , подобнымъ образомъ y марокъ втораго роду содержатъ $11y$ лотовъ серебра и z марокъ , третьяго роду содержатъ $9z$ лотовъ серебра ; почему весь кусокъ серебра содержать будетъ $14x + 11y + 9z$ лотовъ , а понеже оной вѣситъ 30 марокъ , изъ которыхъ каждая содержать должна 12 лотовъ серебра , то надлежитъ количеству серебра въ ономъ кускѣ быть 360 лотовъ ; откуда сіе второе уравненіе выходитъ $14x + 11y + 9z = 360$: изъ сего вычли первое уравненіе 9 разъ взятое ,

и. е.

т. е. $9x + 9y + 9z = 270$, останется $5x + 2y = 90$; откуда и x и y опредѣлить должно, и припомъ въ цѣлыхъ числахъ, но $z = 30 - x - y$, а изъ другаго уравненія получимся $2y = 90 - 5x$ и $y = 45 - \frac{5x}{2}$, положивъ $x = 2u$ найдемся $y = 45 - 5u$ и $z = 3u - 15$. Слѣдовательно u должно быть больше 4хъ, хотя и меньше 10ти. Отсюда выходятъ слѣдующія рѣшенія:

$u =$	5,	6,	7,	8,	9.
$x =$	10,	12,	14,	16,	18.
$y =$	20,	15,	10,	5,	0.
$z =$	0,	3,	6,	9,	12.

832.

Иногда случаются больше нежели 3 неизвѣстныя числа, гдѣ рѣшеніе такимъ же образомъ дѣлается, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно.

Вопросъ. Нѣкто купилъ сотню скотины за 100 рейхсгалеровъ, каждого быка за 10 р.тал.; каждую корову за 5 р.тал.; каждого шленка за 2 р.талер.; каждую овцу

овцу за $\frac{1}{2}r$ шалера. Спрашивается, сколько было быковъ, коровъ, телятъ и овецъ.

Пусть будетъ число быковъ $= p$, коровъ $= q$, телятъ $= r$ и овецъ $= s$, то первое уравненіе будетъ $p + q + r + s = 100$, и второе $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, которое для избѣжанія дробей помножено на 2, дастъ $20p + 10q + 4r + s = 200$, изъ сей вычти первое уравненіе, выдеиъ $19p + 9q + 3r = 100$, отсюда $3r = 100 - 19p - 9q$ и $r = 33\frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, или $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$, по чему $1-p$, или $p-1$ должно дѣлиться на 3; и такъ возми $p-1 = 3t$, то будетъ, какъ слѣдуетъ

$$p = 3t + 1$$

$$q = q$$

$$r = 27 - 19t - 3q$$

$$s = 72 + 2q + 16t$$

И такъ $19t + 3q$ должны быть меньше, нежели 27. Здѣсь можно теперь взять q и t по произволению, съ симъ только договоромъ, чибъ $19t + 3q$ не были
боль.

больше 27ми и по сему слѣдующіе случаи разсмотримъ мы имѣемъ.

I когда $t=0$	II когда $t=1$	t нельзя взять
по условию $p=1$	будемъ $p=4$	$=2$; ибо въ
$q=q$	$q=q$	противномъ
$r=27-3q$	$r=8-3q$	случаѣ вышлаг
$s=72+2q$	$s=88+2q$	бы t отрица-
		тельное.

Въ первомъ случаѣ q не должно быть больше 9, а во второмъ не больше 2хъ; и такъ изъ обоихъ случаевъ получаемъ мы слѣдующія рѣшенія.

Изъ перваго случая выходятъ сіи 10 рѣшеній, какъ

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

а изъ другаго случая сіи 3 рѣшенія

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Слѣдовательно всѣхъ навсе 13 рѣшеній, но когда o исключится, то будетъ только 10.

833.

Способъ рѣшенія бываетъ всегда одинаковъ, хотя бы въ первомъ уравненіи буквы на данныя числа и помножены были, какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуетъ.

Вопросъ. Найти 3 такія числа, изъ которыхъ когда первое помножится на 3, другое на 5, а третье на 7, тобъ сумма произведеній была 160; когда же первое помножится на 9, другое на 25 и третье на 49, тобъ сумма произведеній была 2920?

Пусть будетъ первое число $=x$, другое $=y$, третье $=z$, то выдутъ
сн

сѣи два уравненія I) $3x + 5y + 7z = 560$;
 II) $9x + 25y + 49z = 2920$, изъ втораго
 вычти первое трижды взятое , а именно
 $9x + 15y + 21z = 1680$ останется $10y$
 $+ 28z = 1240$, или раздѣливъ на 2 бу-
 детъ $5y + 14z = 620$; откуда $y = 124$
 $- \frac{14z}{5}$, слѣдовательно z долженъ дѣлиться
 на 5 ; и такъ положи $z = 5u$, бу-
 детъ $y = 124 - 14u$, которыя знаменованія
 поставивъ въ первомъ уравненіи вмѣсто
 z и y дадутъ $3x - 35u + 620 = 560$, или
 $3x = 35u - 60$, и $x = \frac{35u}{3} - 20$, чего ради
 взявъ $u = 3t$ получится наконецъ такое
 рѣшеніе $x = 35t - 20$; $y = 124 - 42t$ и z
 $= 15t$, гдѣ вмѣсто t произвольныя цѣ-
 лыя числа брать можно ; но такъ что-
 бы t было больше 0 , но меньше 3 хъ ,
 откуда получаются сѣи два рѣшенія :

Ie) когда $t = 1$, будетъ $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$

IIe) ежели $t = 2$, получится $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.



ГЛАВА III

О составныхъ неопредѣленныхъ уравненіяхъ , въ которыхъ первая только степень неизвѣстнаго числа находится.

834.

Теперь приступимъ мы къ такимъ уравненіямъ, гдѣ два неизвѣстныя числа ищущся , и каждое не одно , какъ прежде , но или между собою помножены, или до нѣкоторой вышшей степени возвышены попадаются, ежели между тѣмъ другаго числа только первая степень находится. Такія уравненія имѣютъ вообще слѣдующую формулу :

$a + bx + cy + dxx + exy + fx^2 + gxy + hx^4 + kx^3y$ и проч. $= 0$ гдѣ y первой только степени попадаетъ, и слѣдовательно легко опредѣленъ быть можетъ. Но опредѣленіе должно быть такое , чтобъ вмѣсто x и y вышли цѣлыя числа: такіе случаи шанемъ мы теперь разсматривать и начнемъ съ самыхъ легкихъ.

835.

835.

Найти два числа, которыхъ когда сумма придася къ ихъ произведенію, выдешъ 79? Пусть будутъ два прсбуемая числа x и y , то должно быть $xy + x + y = 79$, откуда получаемъ мы $xy + y = 79 - x$ и $y = \frac{79-x}{x+1} = -1 + \frac{80}{x+1}$; по чему явствуешъ, что $x+1$ долженъ быть дѣлитель 80 пи: но понеже 80 имѣетъ многихъ дѣлителей, потому изъ каждаго найдется величина x , какъ изъ слѣдующаго видно:

дѣлители	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
будешъ $x = 0$	1	3	4	7	9	15	19	39	79	
и $y = 79$	39	19	15	9	7	4	3	1	0	

Понеже здѣсь послѣднія рѣшенія съ первыми сходны, того ради всѣхъ рѣшеній будетъ только 5.

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

Подобнымъ образомъ можно такожде разрѣшить сіе всеобщее уравненіе: $xy + ax + by = c$, откуда выдетъ $xy + by = c - ax$ и слѣдовательно $y = \frac{c - ax}{x + b}$, или $y = -a + \frac{ab + c}{x + b}$; чего ради $x + b$ должно быть дѣлителемъ даннаго числа $ab + c$: и такъ изъ каждаго дѣлителя онаго числа можно найти величину x . Положи $ab + c = fg$ такъ что $y = -a + \frac{fg}{x + b}$, и возми $x + b = f$ или $x = f - b$, будетъ $y = -a + g$, или $y = g - a$. По сему различнымъ образомъ число $ab + c$ въ двухъ множителяхъ изъяснить можно, и получится отсюда не одно но два рѣшенія, а именно: первое $x = f - b$ и $y = g - a$; а другое когда $x + b = g$ положится и найдется $x = g - b$, а $y = f - a$.

Еслили бы предложено было сіе уравненіе $xy + 2x + 3y = 42$, то было бы $a = 2$, $b = 3$ и $c = 42$, слѣдовательно $y = -2 + \frac{48}{x + 3}$; теперь число 48 различнымъ образомъ изъ двухъ множителей какъ f, g представлено быть можетъ и всегда найдется $x = f - 3$ и $y = g - 2$, или

$$x = g - 3$$

$x = g - 3$, а $y = f - 2$, такіе множители суть слѣдующіе :

МНОЖИТЕЛИ	I	II	III	IV	V
	1. 48	2. 24	3. 16	4. 12	6. 8
	$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline -2 & 46 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 1 & 22 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 0 & 14 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 1 & 10 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 3 & 6 \end{array}$
или	45 - 1	21 0	13 1	9 2	5 4

837.

Еще генеральнѣе представить можно уравненіе такимъ образомъ ; $txy = ax + by + c$, гдѣ a, b, c и t данныя числа, а вмѣсто x и y пребудутся цѣлыя числа.

По сему ищи y , и получимъ $y = \frac{ax+c}{tx-b}$; а чтобы здѣсь изъ числителя можно было исключить x , то помножь съ обѣихъ сторонъ на t , выдеиъ $ty = \frac{tax+tc}{tx-b} = a + \frac{tc+ab}{tx-b}$. Числитель сей дроби есть извѣстное число ; коего знаменатель долженъ быть дѣлителемъ ; чего ради представь числителя въ двухъ множителяхъ какъ f, g , что различнымъ образомъ

С а

разомъ

разомъ учиниться можетъ, и смотри можно ли одного изъ нихъ сравнить съ $mx - b$, такъ чтобъ $mx - b = f$, а къ сему требуется, когда $x = \frac{f+b}{m}$, чтобъ $f + b$ могло на m раздѣлиться; чего ради здѣсь тѣ только множители изъ $mc + ab$ употребить можно, кои, когда придастся къ нимъ b , могутъ на m раздѣлиться, что изъяснить примѣромъ небезулучно.

Пусть будетъ $5xy = 2x + 3y + 18$, отсюда получится $y = \frac{2x + 18}{5x - 3}$ и $5y = \frac{10x + 90}{5x - 3} = 2 + \frac{96}{5x - 3}$; здѣсь числа 96 ти такихъ дѣлителей искать надлежитъ, что ежели къ нимъ придадутся 3, то сумма на 5 раздѣлится: и такъ возми всѣхъ множителей 96 ти, кои суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Откуда видно, что сіи только числа 2, 12, 32, употребить можно.

Пусть

Пусть теперь I) $5x - 3 = 2$, будетъ $5y = 50$
слѣдов. $x = 1$, а $y = 10$.

II) $5x - 3 = 12$ — — — $5y = 10$.
— — — $x = 3$, $y = 2$.

III) $5x - 3 = 32$ — — — $5y = 5$.
— — — $x = 7$, $y = 1$.

838.

Понсже здѣсь во всеобщемъ рѣше-
нїи $my - a = \frac{mc + ab}{mx - b}$, по слѣдующее при-
мѣчать потребно, Ежели въ сей формулѣ
 $mc + ab$ содержащееся число имѣетъ дѣ-
лителя, коимъ находится въ форму-
лѣ $mx - b$, то частное тогда неопмѣн-
но должно имѣть сїю формулу $my - a$, и
тогда число $mc + ab$ чрезъ такое произ-
веденїе $(mx - b)(my - a)$ представлено быть
можетъ. Пусть будетъ на прим. $m = 12$,
 $a = 5$, $b = 7$ и $c = 15$, то получится
 $12y - 5 = \frac{215}{12x - 7}$, а 215 ти дѣлителями суть
1, 5, 43, 215, между которыми пѣ, кои
найти должно, содержащая въ формулѣ

$12x-7$; или когда 7 кѢ онымѢ приладуш-ся, тобѢ дѣлилась сумма на 12. Здѣсь 5 только сѣ дѣлаетъ, и такѢ $12x-7=5$, а $12y-5=43$: изъ первой формулы будетъ $x=1$, а изъ второй y найдется въ цѣлыхъ числахъ, а имен-но $y=4$. Сѣ обстоятельство въ рассу-жденіи свойства чиселъ есть великой ва-жности, и для того примѣнать оное все-ма нужно.

839.

Разсмотримъ еще такое уравненіе:
 $xy+xx=2x+3y+29$; отсюда найдется
 $y=\frac{2x-xx+29}{x-3}$, или $y=-x-1+\frac{26}{x-3}$;

и такѢ $x-3$ долженъ быть дѣлитель числа 26, и тогда частное будетъ $y+x+1$; но дѣлители 26ти суть 1, 2, 13, 26, то получаемъ мы сіи рѣшенія:

Ie) $x-3=1$, или $x=4$, будетъ $y+x+1=7+5=26$, и $y=21$.

Iie) $x-3=2$, или $x=5$, будетъ $y+x+1=7+6=13$ и $y=7$.

IIie)

IIIe) $x-3=13$, или $x=16$, будетъ $y+17$
 $= 2$, и $y=-15$,

которое отрицательное знаменованіе оставлено, и для того послѣдняго случая $x-3=26$ цѣпять не должно.

840.

О другихъ формулахъ сего рода, въ которыхъ, первой только степени, говорить здѣсь не нужно; ибо такіе случаи рѣдко попадаются, да и тогда по показанному здѣсь правилу, рѣшены быть могутъ. Но когда у до второй, или до вышшей степени возвышено будетъ, и величину онаго по даннымъ правиламъ опредѣлить за благо разсудится, то выдутъ въ такомъ случаѣ коренные знаки, позади коихъ вторая, или вышшая степень x находится; а надлежитъ величину x найти такъ, чтобъ извлечкомость, или коренной знакъ уничтожился.

И въ семъ то состоитъ самое искусство неопредѣленной аналитики, ша-

кія не извлекаемыя формулы дѣлать извлекаемыми ; что мы въ слѣдующей главѣ покажемъ.



ГЛАВА IV.

О способѣ неизвлекаемую формулу $V(a+bx+cx^2)$ дѣлать извлекаемою.

841.

Здѣсь спрашивается , какую величину вмѣсто x взять надлежитъ , чтобъ формула $a+bx+cx^2$ дѣйствительною была квадратъ , и такимъ бы образомъ можно было извѣстивъ ся корень въ раціональныхъ , а b и c означатъ данныя числа , и изъ свойства оныхъ особливо зависить опредѣленіе неизвѣстнаго числа x .

При семъ прежде примѣчать должно , что во многихъ случаяхъ рѣшенія оныхъ бывающіе не возможны. Но ежели рѣшеніе будетъ возможное , то должно по крайней мѣрѣ въ опредѣленіи буквы x ,
довольство-

довольствоваться сперва одной только рациональною величиною и не требовать, чтобъ были они еще и цѣлыя числа; что совсемъ особливаго требованія разысканія.

842.

Мы полагаемъ здѣсь, что формула до второй только степени возвышена; ибо высшіе степени особливаго требуютъ способу, о которомъ послѣ говорить должно.

Но если бы здѣсь и второй степени не случилось и было бы $c = 0$, то бы вопросъ никакой не имѣлъ трудности; ибо, когда сія формула дана будетъ $V(a + bx)$ и надлежитъ опредѣлить x , такъ чтобъ $a + bx$ былъ квадратъ, то должно только положить $a + bx = y^2$; откуда тотчасъ выйдетъ $x = \frac{y^2 - a}{b}$, и теперь вмѣсто y можно брать всѣ произвольныя числа, и изъ каждаго такого знаменованіе вмѣсто x найдется, что $a + bx$ будетъ квадратъ, и слѣдовательно $V(a + bx)$ рациональное число.

С 5

843.

Начнемъ съ сей формулы $V(1+xx)$, гдѣ такія знаменованія вмѣсто x найсти должно, что если къ ихъ квадрату xx придастся еще 1, тобѣ сумма была паки квадратъ, что, какъ видно, въ цѣлыхъ числахъ быть не можетъ; ибо нѣтъ ни одного квадратнаго числа, которое бы было 1 цѣю больше предъидущаго; и шакъ неопмѣнно довольствоваться должно ломаными числами вмѣсто x .

Понеже $1+xx$ квадратное число быть должно, и мы бы захопѣли положить $1+xx=yy$, то вышло бы $xx=yy-1$, и $x=V(yy-1)$; и такъ чтобъ найсти x , должно вмѣсто x такія искать числа, чтобъ ихъ квадраты уменьшенные 1 цѣю были паки квадраты, которой вопросъ столь же труденъ какъ и прежней; и слѣдовательно симъ бы мы ничего не выиграли.

А что-

А что дѣйствительно есть такіа дроби, кои будучи вмѣсто x взяты, дѣлаютъ $1 + xx$ квадратомъ, то изъ слѣдующихъ случаевъ видѣть можно.

I) когда $x = \frac{1}{4}$, будетъ $1 + xx = \frac{17}{16}$, слѣдовательно $\sqrt{1 + xx} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

II) равнымъ образомъ сіе учинится, когда $x = \frac{4}{3}$, гдѣ найдется $\sqrt{1 + xx} = \frac{5}{3}$.

III) попомъ ежели положится $x = \frac{3}{12}$, то получится $1 + xx = \frac{169}{144}$, изъ чего квадратной корень есть $\frac{13}{12}$.

Какимъ образомъ, должно находить больше такихъ чиселъ, о семъ надлежитъ здѣсь показать.

845.

Сіе учинится можетъ двоякимъ образомъ; по первому способу положи $\sqrt{1 + xx} = x + p$, будетъ $1 + xx = xx + 2px + pp$, гдѣ квадратъ xx уничтожается; и слѣдовательно x безъ кореннаго знака опредѣленъ быть можетъ;

ибо въ найденномъ уравненіи вычти съ обѣихъ сторонъ xx' , останется, $2px - + pp = 1$, откуда найдется $x = \frac{1 - pp}{2p}$, гдѣ вмѣсто p , каждое цѣлое число и дроби брать можно.

И такъ положивъ $p = \frac{m}{n}$ будетъ $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{2 \frac{m}{n}}$; сію дробь помноживъ вверху, и внизу n на m получишь $x = \frac{nn - mm}{2mn}$

846.

По сему, чтобы $1 + xx$ была квадратъ, можно вмѣсто m и n по произволению брать всѣ возможные числа; и слѣдовательно отсюда безконечное множество знаменованій вмѣсто x найдется.

Положи вообще $x = \frac{nn - mm}{2mn}$, будетъ $x^2 + 1 = 1 + \frac{n^2 - 2mm + m^2}{4mn}$, или $x^2 + 1 = \frac{n^2 + 2mm + m^2}{4mn}$, которая дробь есть дѣй-

дѣйствительной квадратъ , и найдется
отсюда $V(1+x) = \frac{nn+mm}{2mn}$. Изъ
сего слѣдующія малая числа вмѣсто x
изъявить можно;

если $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
и $m = 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$
будетъ $x = \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{12}, \frac{15}{8}, \frac{7}{24}, \frac{12}{5}, \frac{21}{40}, \frac{8}{15}, \frac{9}{40}.$

847.

Отсюда слѣдуетъ вообще , что
 $1 + \frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}$; помноживъ сіе
уравненіе на $(2mn)^2$, будетъ $(2mn)^2$
 $+ (nn-mm)^2 = (nn+mm)^2$; по сему имѣемъ
мы вообще два квадрата , коихъ сумма
пакъ квадратъ. Симъ разрѣшася теперь
сей вопросъ :

найти два квадратныя числа , коихъ
сумма пакъ квадратъ ?

Для $pp+qq=rr$, положи только $p=2nn$
и $q=nn-mm$, будетъ $r=nn+mm$, попомъ
 $(nn+mm)^2 = (2nn)^2 + (nn-mm)^2$, отсюда
можемъ мы также рѣшить и сей вопросъ.

Найти

Найти два квадратныя числа, коихъ бы разность была также квадратъ ?

Положимъ $pp - qq = rr$, то должно только взять $p = m + mm$, а $q = 2mn$, и будетъ $r = m - mm$, или можно также положить $p = m + mm$, а $q = m - mm$ и тогда будетъ $r = 2mn$.

848.

Мы обобщали формулу $1 + xx$ двоякимъ образомъ адблатъ квадратомъ; другой способъ есть слѣдующей.

Положи $V(1 + xx) = 1 + \frac{mx}{n}$, откуда получится $1 + xx = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$, вычши съ обѣихъ сторонъ 1, останется $xx = \frac{2mx}{n} + \frac{mm}{nn} xx$, которое уравненіе на x раздѣлившись можемъ, и выдешъ $x = \frac{2m}{n} + \frac{mmx}{nn}$, или умноживъ на n будетъ $mxx = 2mn + mmx$, откуда найдемъ
ся

ся $x = \frac{2mn}{nn - mm}$, поставивъ сію величину

вмѣсто x будетъ $1 + xx = 1 + \frac{4m^2nn}{n^4 - 2m^2nn + m^4}$,

или $= \frac{n^4 - 2m^2nn + m^4}{n^4 - 2m^2nn + m^4}$, которая дробь

есть квадратъ изъ $\frac{nn + mm}{nn - mm}$; но когда

теперь получается сіе уравненіе $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn - mm)^2}$

$= \frac{(nn + mm)^2}{(nn - mm)^2}$, то слѣдуетъ отсюда,

какъ и прежде, $(nn - mm)^2 + (2mn)^2 = (nn + mm)^2$ два квадрата, коихъ сумма есть квадратъ.

849.

Сей случай, который мы разсмотримъ обстоятельно, даетъ намъ два способа, чѣмъ въ всеобщую формулу $a + bx + cx^2$ здѣлать квадратомъ. Первой бываетъ въ такихъ случаяхъ, гдѣ c квадратъ, а второй гдѣ a квадратъ, которые оба случая мы здѣсь пройдемъ. I. пусть будетъ сперва c квадратное число,

или

или пусть будетъ данная формула $a + bx + ffx$, которую квадратомъ дѣлать надлежитъ. На сей концѣ положи $V(a + bx + ffx) = fx + \frac{m}{n}$, будетъ $a + bx + ffx = ffx + \frac{2fm}{n} + \frac{mm}{nn}$, гдѣ на обѣихъ сторонахъ xx уничтожается, такъ что $a + bx = \frac{2mf}{n} + \frac{mm}{nn}$, которое уравненіе помноживъ на n даемъ $na + nbx = 2mf + \frac{mm}{n}$, откуда найдемъ $x = \frac{mm - na}{nb - 2mf}$. Сте знаменованіе поставивъ вмѣсто x будемъ $V(a + bx + ffx) = \frac{mmf - nna}{nb - 2mf} + \frac{m}{n}$, или $= \frac{mnb - mmf - nna}{nb - 2mf}$.

850.

Но понеже вмѣсто x найдена дробь, то положи $x = \frac{p}{q}$ такъ чтобъ $p = mm - na$, а $q = nb - 2mf$, и формула $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffpp}{qq}$ тогда будетъ квадратъ, слѣдовательно будетъ она также квадратъ

ратъ ежели на квадратъ qq помножится; почему и сія формула $aqg + brq + ffr$ будетъ такожде квадратъ, ежели положится $p = mt - na$ и $q = mb - 2mf$, откуда безконечное множество рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ найти можно, попому что буквы m и n по изволенію брать можно.

851.

II. Второй случай бываетъ, когда первая буква a квадратъ, и по сему пусть будетъ дана сія формула $ff + bx + cx^2$, которую квадратомъ сдѣлать надлежитъ; на сей конецъ положи $V (ff + bx + cx^2) = f + \frac{mx}{n}$, будетъ $ff + bx + cx^2 = ff + \frac{2mfx}{n} + \frac{mmx^2}{nn}$, гдѣ ff уничтожается, а остальные члены на x раздѣлившись могутъ, такъ что $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$ или $nmb + nmcx = 2mnf + mmx$ или $nmcx - mmx = 2mnf - nmb$, слѣдовательно $x = \frac{2mnf - nmb}{nmc - mm}$. Подставь сію величину въ томъ II. Т вмѣсто

вмѣсто x , будетъ $V(ff + bx + cxx) = f + \frac{2mf - mb}{nc - m} = \frac{mcf - mf - mb}{nc - m}$. Положи здѣсь $x = \frac{p}{q}$, то можно квадратомъ здѣлать слѣдующую формулу $ffqq + brq + crp$, что учинится, когда положится $p = 2mf - mb$, а $q = nc - m$.

852.

Здѣсь случай особливо достопамятенъ, когда $a = 0$, или когда формулу $bx + cxx$ квадратомъ здѣлать должно; то надлежитъ только поставить $V(bx + cxx) = \frac{mx}{n}$, будетъ $bx + cxx = \frac{m^2xx}{n}$, гдѣ раздѣливъ на x и помноживъ на n , выдетъ $bnt + cntx = m^2x$, слѣдовательно $x = \frac{nb}{m^2 - cn}$. Найми на прим. всѣ треугольные числа, которые бы были вдругъ и квадратныя, то должно $\frac{xx + x}{2}$, и слѣдовательно $2xx + 2x$ быть квадратъ, и положимъ оной теперь $\frac{m^2xx}{n}$, то

$2mx + 2m = mx$, и $x = \frac{2m}{m-2n}$, гдѣ
 вмѣсто m и n всѣ возможные числа брать
 можно. И выходить будетъ по большей
 части вмѣсто x дробь; а иногда
 и цѣлая числа. Такъ, когда поло-
 жимся $m=3$, а $n=2$, то получится
 $x=8$, коего треугольное число есть 36,
 которое также есть и квадратъ; мо-
 жно также взять $m=7$ и $n=5$, будетъ
 $x=-50$, коего треугольное число есть
 1225, которое вдругъ и 49ми треуголь-
 ное и также квадратное.

Сие получится также, ежели возмемъ-
 ся $n=7$ и $m=10$; ибо тогда будетъ
 $x=49$.

Равнымъ образомъ можно положить
 $m=17$, а $n=12$, будетъ $x=288$, коего
 треугольное число есть $\frac{x(x+1)}{2}$,
 $= \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$, которое есть
 квадратное число, а корень онаго $= 12 \cdot 17$
 $= 204$.

853.

Въ семъ послѣднемъ случаѣ разсмотримъ надлежитъ, чтобъ по сему основанію формулу $bx + cx^2$ здѣлать квадратомъ. Ибо она имѣетъ множителя x ; что ведетъ насъ къ новымъ случаямъ, въ которыхъ также и формула $a + bx + cx^2$ квадратомъ быть можетъ, когда ни a ни c не квадраты.

Оные случаи имѣютъ мѣсто, когда $a + bx + cx^2$ на двухъ множителяхъ разрѣшиться можетъ; что учинится ежели $bb - 4ac$ есть квадратъ. Для показанія сего надлежитъ примѣчать, что множители отъ корней уравненія зависятъ, чего ради положи $a + bx + cx^2 = 0$, будешь $cx^2 = -bx - a$ и $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, откуда найдешся $x = \frac{-b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)}$ или $x = \frac{-b \pm \sqrt{(bb - 4ac)}}{2c}$; по чему явствуетъ, что ежели $bb - 4ac$ есть квадратъ, то можно опредѣлить корни рациональной, и по сему пусть будетъ

bb

$bb - 4ac = dd$, то выдутъ корни $x = \frac{-b+d}{2c}$,
 или $x = \frac{-b-d}{2c}$; и такъ дѣлители фор-
 мулы $a + bx + cx^2$, будутъ $x + \frac{b-d}{2c}$, и
 $x + \frac{b+d}{2c}$, кои помноживъ между собою,
 получишь ту же формулу раздѣленную
 только на c . А именно найдется $xx + \frac{bx}{c}$
 $+ \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$; но $dd = bb - 4ac$, то полу-
 чится $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx$
 $+ \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$: помноживъ на c выдетъ cx^2
 $+ bx + a$, слѣдовательно должно только
 одного множителя на c помножить, то
 формула наша равна будетъ сему про-
 изведенію $\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c} \right)$, и ви-
 дно, что сіе рѣшеніе всегда мѣсто
 Т 3 имѣетъ

имѣетъ, какъ скоро $bb - 4ac$ будетъ квадратъ.

854.

Отсюда раздѣлится третей случай, въ которомъ формулу нашу $a + bx + cx^2$ квадратомъ задѣлать можно, и которой мы къ двумъ прежнимъ присовокупимъ.

III. Сей случай тогда только бываетъ, когда формулу нашу чрезъ такое произведеніе представимъ можно, какъ $(f + gx)(b + kx)$, а дабы сіе сдѣлать квадратомъ, то положи корни $\sqrt{(f + gx)(b + kx)} = m \sqrt{f + gx}$, получится $(f + gx)(b + kx) = \frac{(mm)(f + gx)^2}{nn}$, которос уравненіе раздѣливъ на $f + gx$, получишь $b + kx = \frac{mm(f + gx)}{nn}$ и. с. $bnn + knx = fmm + gmmx$; откуда найдется $x = \frac{fmm - bnn}{knn - gmm}$,

855.

Для извѣсненія сего пусть предположенъ будетъ сей вопросъ,

Найти

Найти числа x такъ, что если изъ удвоеннаго ихъ квадрата вычтешь 2, тобы остатокъ былъ квадратъ?

Понеже $2xx - 2$ должно быть квадратное число, то надлежитъ здѣсь смотрѣть, чтобъ эту формулу чрезъ слѣдующихъ множителей представить $2(x+1)(x-1)$. Полагая корни $= \frac{m(x+1)}{n}$ будемъ $2(x+1)(x-1) = \frac{mm(x+1)^2}{nn}$; раздѣливъ на $x+1$ и помноживъ на nn получимся $2nmx - 2nn = mmx + mm$, а отсюда $x = \frac{mm+2nn}{2nn-mm}$. Возми здѣсь $m=1$ и $n=1$ будемъ $x=3$, $2xx-2=16=4^2$; положи $m=3$ и $n=2$ выдстъ; $x=-17$; но понеже здѣсь квадратъ числа x входитъ, въ разсужденіе, то все равно, будемъ ли $x=-17$, или $x=+17$: ибо изъ обоихъ получится $2xx-2=576=24^2$.

Пусть дана будетъ сія формула $b^2 + 13x + 6xx$, которую квадратомъ зѣб-
лать надлежитъ. Зѣбсь $a=6$, $b=13$ и
 $c=6$, гдѣ слѣдовательно ни a ни c не
квадраты; и такъ смотри не квадратъ
ли $b^2 - 4ac$; но зѣбсь выходящій 25, то
видно что сію формулу въ двухъ
множителяхъ предсавить можно, кои
суть $(2 + 3x)(3 + 2x)$. Пусть будетъ ко-
рень сего $\frac{m(2+3x)}{n}$, то $(2+3x)(3+2x)$

$$= \frac{mm(2+3x)^2}{nn}, \text{ отсюда } 3mn + 2mnx = 2mm$$

$$+ 3mnx, \text{ и } x = \frac{2mm - 3mn}{2nn - 3mn} = \frac{3nn - 2mm}{3mm - 2nn}.$$

А чтобы числитель былъ положитель-
ной, то $3nn$ должны быть больше не-
жели $2mm$, или $2mm$ меньше $3nn$, слѣдо-
вательно $\frac{mm}{nn}$ меньше быть должно не-

жели $\frac{1}{2}$; чтобы числитель былъ положитель-
ной; но чтобы знаменатель также былъ при-
быточный, то $3mm$ должны быть больше
нежели

нежели $2mn$ слѣдовательно $\frac{mn}{nn}$ должно
 быть больше $\frac{2}{3}x$: и такъ чпюбъ вмѣсто
 x найди положительныя числа, по вмѣ-
 сто m и n такія числа брать надлежитъ,
 чпюбъ $\frac{mn}{nn}$ меньше было $\frac{2}{3}x$, а боль-
 ше $\frac{2}{3}x$. Положи теперь $m=6$ и $n=5$,
 будетъ $\frac{mn}{nn} = \frac{36}{25}$ меньше $\frac{2}{3}x$ и очевидно
 больше $\frac{2}{3}x$, откуда найдемъ $x = \frac{3}{5}$.

857.

IV. Сей пррпсй случай введешъ насъ
 къ четвертому, которой иногда мѣсто
 имѣетъ, когда формулу $a+bx+cx^2$ мо-
 жно раздробить на двѣ части такъ, что
 первая будетъ квадратъ, а другая на два
 множителя разрѣшится, такъ что вмѣсто
 первой выйдетъ такая формула $pp+qr$,
 гдѣ буквы p , q и r такую формулу
 $f+gx$ означаютъ, и тогда надлежитъ толь-
 ко положить $V(pp+qr)=p+\frac{mq}{n}$, получимъ:

Т 5

ся

ся $pr + qr = pr + \frac{2mrq}{n} + \frac{mq^2}{m}$, гдѣ pr уничтожается, а остальные члены на q дѣляясь, такъ что $r = \frac{2mr}{n} + \frac{mq}{m}$, или $mr = 2mr + mq$, откуда легко найдется x : и сей по еслѣ четвертой случай, въ которомъ формулу нашу квадратамъ здѣлать можно и которой мы примѣромъ изъяснить намерены.

858.

Вопросъ. Найди такія числа x , чтобъ ихъ удвоенной квадратъ единицею былъ больше другаго квадрата, или когда изъ онаго отнимешь x цу, чтобъ въ остаткѣ былъ квадратъ? какъ по сѣ числомъ 5 дѣлается, коего квадратъ 25 дважды взятой есть 50: изъ него отнявъ x цу останется квадратъ 49.

По сему $2ax - 1$ должно быть квадратъ, гдѣ по нашей формулѣ $a = -1$,
 $b = 0$

$b=0$ и $c=2$; здѣсь ни c ни a не квадраты и не могутъ такъ же на два множителя разрѣшиться, потому что $bb-4ac=8$ не квадратъ: и такъ ни одинъ изъ первыхъ трехъ случаевъ мѣста не имѣютъ.

А по четвертому можно сию формулу представить такъ: $xx+xx-1=xx+(x+1)(x-1)$, откуда корень положивъ $=x+\frac{m\,x+1}{n}$ будетъ $xx+(x+1)(x-1)=xx+\frac{2mx\,x+1}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, гдѣ xx уни-

чтожается, а остальные члены на $x+1$ раздѣлившись могутъ; и выдѣлѣ $m\,x-m$ $=2m\,x+m\,x-m$; по чему $x=\frac{mm+mn}{nn+2mn-mm}$

и понеже въ нашей формулѣ $2xx-1$ попадаетъ только квадратъ xx , то все равно, выдѣлѣ ли x положительной или отрицательной; можно также и $-m$ поставить вмѣсто $+m$, чтобъ получить

$x=\frac{mm-mn}{nn+2mn-mm}$. Возми здѣсь $m=1$ и n

$=1$, найдется $x=1$ и $2xx-1=1$; положи
еще

еще $m=1$ и $n=2$, будетъ $x=\frac{5}{7}$ и $2xx-1=\frac{1}{49}$; а когда возьмется $m=1$ и $n=-2$ выйдетъ $x=-5$, или $x=-\frac{1}{5}$, $2xx-1=49$.

859.

Вопросъ. Найти такія числа, къ удвоенному коихъ квадрату когда придастся 2 пубъ выйдетъ квадратъ? Такое число есть 7, котораго квадратъ дважды взятой есть 98, придавъ 2 получится квадратъ 100.

И такъ сѣя формула $2xx+2$ должна быть квадратъ, гдѣ $a=2$, $b=0$ и $c=2$, слѣдовательно ни a ни c не квадратъ, также и $bb-4ac$ не квадратъ и притомъ правило имѣть здѣсь мѣста не можетъ.

А по четвертому правилу можно нашу формулу такъ представить.

Положи первую часть $=4$ будетъ вторая $2xx-2=2(x+1)(x-1)$ и по сему формула наша $4+2(x+1)(x-1)$, коей корень пусть будетъ $2+\frac{m(x+1)}{n}$; от-
куда

куда выходитъ сіе уравненіе $4 + 2(x + 1)$

$$(x - 1) = 4 + \frac{4m(x + 1)}{n} + \frac{mm'(x + 1)^2}{nn'}, \text{ гдѣ}$$

4 уничтожаются, а остальные члены на $x + 1$ могутъ раздѣлиться, такъ что $2mnx - 2nn' = 4mn + mm'x + mm'$, слѣдовательно

$$\text{но } x = \frac{4mn + mm' + 2nn'}{2nn' - mm'}. \text{ Положи } m = 1$$

и $n = 1$, будетъ $x = 7$ и $2xx + 2 = 100$; возьми $m = 0$ и $n = 1$ выйдетъ $x = 1$ и $2xx + 2 = 4$.

860.

Часто случается, что ни первое, ни второе, ни третье правило имѣть мѣста не могутъ, а по четвертому формулы на двѣ такія части, какія преобразуются раздѣлить не можно. Такъ когдабы сія формула случилась $7 + 15x + 13xx$, то хотя такое раздробленіе и возможно; но не скоро оное видѣть можно. Ибо первая часть есть $(1 - x)^2$, или $1 - 2x + xx$, по сему другая будетъ $6 + 17x + 12xx$, которая для того множителей имѣетъ, что $17^2 - 4.6.12 = 1$, и слѣдовательно

ваительно квадратъ ; два множителя изъ сего уравненія дѣйствительно суть $(2+3x)$ $(3+4x)$, такъ что сію формулу по четвертому правилу разрѣшить можно.

Но и лзя требовать , чтобъ кто се раздѣленіе угадать могъ ; чего ради наѣбрены мы еще общей путь показати къ познанію , возможно ли такую формулу раздробить ; ибо безконечно много есть такихъ, которыхъ рѣшенія совсѣмъ не возможны, какъ наприм. въ сей формулѣ $3xx + 2$, которую никогда квадратомъ здѣлать не можно. Но еслии найдется формула въ нѣкоторомъ случаѣ возможна , то легко можемъ найти всѣ ея рѣшенія ; что мы здѣсь еще изяснимъ.

861.

Вся польза , которая въ такихъ случаяхъ быть можетъ , состоятъ въ томъ , возможно ли какой случай найти, или отгадать , въ которыхъ бы формула $a+bx+cx^2$ была квадратъ. Для того вмѣсто x ставя малыя числа по порядку,

и смотри не выйдет ли квадратъ. Но что бы сей трудъ облегчить, если въспомо x ломаная числа иногда полагая требуемое получается, то можно сразу поставивъ въспомо x дробь; яко $\frac{t}{u}$, откуда рождается сія формула, $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, которая, ежели будетъ квадратъ, помножена на uu даетъ также квадратъ. И такъ нужно только пробовать не можно ли отгадать t и u въ цѣлыхъ числахъ, чтобъ сія формула $auu + btu + ctt$ была квадратъ; ибо тогда положивъ $x = \frac{t}{u}$, будетъ также сія формула $a + bx + cxx$ заподлинно квадратъ.

Но когда не смотря на весь сей трудъ, никакого случая не найдется, то имѣемъ мы большую причину думать, что такой формулы здѣлать квадратомъ совсѣмъ не возможно, какихъ естъ безконечное множество.

Когда же случай отгаданъ , въ которомъ формула будетъ квадратомъ , то легко найти всѣ возможные случаи , въ которыхъ она равнымъ образомъ будетъ квадратъ , и число оныхъ всегда бесконечно велико. Для показанія сего , рассмотримъ въпервыхъ формулу $2 + 7xx$, гдѣ $a=2$, $b=0$ и $c=7$, оное , какъ явствуетъ , будетъ квадратъ , когда $x=1$, чего ради положи $x=1+y$, будетъ $xx=1+2y+yy$, и формула наша будетъ $9+14y+7yy$, въ которой первой членъ есть квадратъ , и такъ по второму правилу полагая корень ея $=3 + \frac{my}{n}$ получаемъ сіе уравненіе $9+14y + 7yy = 9 + \frac{6my}{n} + \frac{mm yy}{nn}$, гдѣ 9 уничтожаются , а остальные члены на y могутъ раздѣлиться , и выдѣтъ $14m + 7my = 6mn + mny$; слѣдовательно

у

$$y = \frac{6mn - 14mn}{7nn - mn}, \text{ и на концѣ } x = \frac{6mn - 7nn - mn}{7nn - mn}.$$

гдѣ вмѣсто m и n всѣ произволяющія числа брать можно.

Положи теперь $m = 1$ и $n = 1$ будетъ $x = -\frac{1}{3}$, или также, замѣмъ что xx входятъ, $x = +\frac{1}{3}$, по сему будетъ $2 + 7xx = \frac{26}{9}$.

Возми еще $m = 3$ и $n = 1$, будетъ $x = -1$; или $x = +1$, но положивъ $m = -3$, $n = 1$, выдетъ $x = 17$, а отсюда $2 + 7xx = 2025$ квадратъ 45ти.

Пусь также будетъ $m = 8$, а $n = 3$ получится $x = -17$ какъ и прежде.

Положимъ $m = 8$, а $n = -3$ выдетъ $x = 217$, а отсюда $2 + 7xx = 51489 = 717^2$.

863.

Разсмотримъ еще сію формулу, $5xx + 3x + 7$, которая будетъ квадратъ, когда $x = -1$; и такъ полагая $x = y - 1$, чего ради формула наша переменится въ сію:

Толѣ II.

у

519

$$\begin{array}{r} 5y - 10y + 5 \\ + 3y - 3 \\ + 7 \\ \hline \end{array}$$

$5y - 7y + 9$ квадратной ся корень
положи $= 3 - \frac{my}{n}$, будетъ $5y - 7y + 9$
 $= 9 - \frac{my}{n} + \frac{mmy}{nn}$, откуда получимъ $5my$
 $- 7m = - 6mn + mmy$ и $y = \frac{7m - 6mn}{5m - mm}$, слѣ-
довательно $x = \frac{2m - 6mn + mm}{5m - mm}$. Возми $m = 2$,
 $n = 1$, будетъ $x = 6$, и слѣдовательно
 $5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2$.

Положивъ $m = -2$ и $n = 1$ найдемся
 $x = 18$, и $5xx + 3x + 7 = 1681 = 41^2$.

864.

Разсмотримъ еще формулу $7xx$
 $+ 15x + 13$ и положимъ $x = \frac{t}{u}$, такъ
чтобъ формула $7t + 15t + 13u$ была
квадратъ; попробуй теперь въб-
сто t и u брать малые числа, какъ
слѣдуетъ.

Ежели

Если $t=1$ и $k=1$ будет наша формула=35

$$t=2 \text{ и } u=1 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad =7$$

$t=2 \text{ } n u=-1 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad = 1$

$$I=3 \text{ и } u=1 \rightarrow \dots \rightarrow 121$$

Понеже 121 есть квадратъ, и слѣдо-
вательно $x=3$ удовлетворяетъ; положи
теперь $x=y+3$, формула наша будетъ
 $7y+42y+63+15y+45+13$ или $7y$
 $+57y+121$, коей корень положи $=11$
 $+ \frac{my}{n}$, и получимся $7y+57y+121=121$

$$+ \frac{22ny}{n} + \frac{mny}{nn}, \text{ или } 7ny + 57n = 22nn$$

$\frac{1}{2}mn$, откуда $y = \frac{57mn - 22mn}{mn - 7mn}$, а x

$$= \frac{36mn - 22mn + 3mn}{mn - 7mn}, \text{ Возми на прим.}$$

$m=3$ и $n=1$ будешь $x=-\frac{7}{2}$ и формула
наша $7xx+15x+13=\frac{25}{4}=(\frac{5}{2})^2$.

Пусть еще будетъ $m=1$ и $n=1$, вы-
дстъ $x=-\frac{17}{6}$; положи $m=-3$ и $n=1$
найдется $x=\frac{129}{2}$, и формула наша $7xc$
 $+15x+13=\frac{120409}{1}=(\frac{347}{1})^2$.

Иногда весь трудъ бываетъ напрасенъ, чтобъ отгадать случай, въ которомъ бы предложенная формула была квадратъ; какъ на прим. съ формулою дѣлается $3x^2 + 2$ или когда вмѣсто x возмется $\frac{1}{x}$; то съ ссю $3x^2 + 2$ ии, которая, какія бы вмѣсто x и i числа взяты ни были, никогда квадратомъ не будетъ. Такихъ формулъ, коихъ ни коимъ образомъ квадратомъ дѣлать не лзя, есть бесконечное множество, и для того стоить труда дать нѣкоторые признаки, по которымъ бы сию въ нихъ невозможность познать можно было, дабы сей трудъ, чрезъ отгадываніе находить такіе случаи, въ которыхъ квадратъ выходитъ, не былъ тщетенъ, къ чему слѣдующая глава служишь.



ГЛАВА V

О случаяхъ , въ которыхъ формула $a + bx + cx^2$ никогда квадратомъ быть не можетъ,

866.

Когда общая наша формула состоитъ изъ трехъ членовъ , то надлежитъ примѣчать , что оную всегда въ другую переменную можно , въ которой средняго члена недостаетъ. Сіе дѣлается положивъ $x = \frac{y-b}{2c}$; по чему фор-

мула наша получаетъ сей видъ $a + \frac{by - bb}{2c} + \frac{yy - 2by + bb}{4c}$, или $\frac{4ac - bb + yy}{4c}$; но по-

неже сія формула должна быть квадратъ , по положивъ его $= \frac{zz}{4}$ будетъ $4ac - bb + yy = zz$, слѣдовательно $yy = zz + bb - 4ac$. И такъ ежели наша формула должна быть квадратъ , то будетъ также и $zz + bb - 4ac$ квадратъ и обрат-

У 3

но ;

но ; следовательно когда вмѣсто $bb-4ac$ напишемъ t , то все дѣло въ томъ состоитъ, узнать можетьли такая формула быть квадратъ или нѣтъ; а поелику сія формула состоитъ только изъ двухъ членовъ , то безпорно легче разсуждать о ея возможности или невозможности, что по свойству обоихъ чиселъ c и t учинишься можешь.

867.

Когда $t=0$, то явствуетъ , что формула czz , тогда только будетъ квадратъ , когда число c квадратъ ; ибо одинъ квадратъ раздѣленный на другой, въ частномъ даютъ квадратъ: такъ czz не можеть быть квадратъ , ежели $\frac{czz}{zz}$, ш c не квадратъ ; следовательно когда c не квадратъ , то формула czz ни коимъ образомъ квадратъ быть не можеть. Но ежели c само по себѣ есть квадратное число, то и czz будетъ также квадратъ , какія бы числа вмѣсто z взяты ни были.

868.

868.

А что бы можно было рассуждать и о другихъ случаяхъ, то надлежитъ намъ въ помощь взять то, что прежде говорено было, о разныхъ родахъ чиселъ, въ рассужденіи каждаго дѣлителя.

Такъ въ рассужденіи дѣлителя 3 числа бываютъ прозякаго рода: первой содержатъ тѣ числа, кои на 3 дѣлятся нацѣло и въ формулѣ $3n$ представляются.

До втораго рода надлежатъ тѣ, кои раздѣленные на 3, даютъ въ остаткѣ 1 и въ формулѣ $3n+1$ содержатся.

Третій родъ заключаетъ въ себѣ числа, кои раздѣленные на 3, даютъ остатокъ 2 и содержатся въ формулѣ $3n+2$.

Ежели всѣ числа въ одной изъ сихъ трехъ формулъ содержатся, то рассмотримъ теперь ихъ квадраты.

Когда число содержится въ формулѣ $3n$, то будетъ его квадратъ $9n^2$, кото-

У 4

рой

рой не только на 3, но и на 9 дѣлится.

Буде же число во второй формулѣ $3n+1$ содержится, то квадратъ его есть $9m+6n+1$, которой раздѣленъ будучи на 3 даетъ въ частномъ $3m+2n$, а въ остатокъ 1, слѣдовательно до втораго рода надлежитъ.

Ежели же наконецъ содержится число въ формулѣ $3n+2$, то квадратъ его есть $9m+12n+4$, которой раздѣливъ на 3 выдеиъ $3m+4n+1$, а остатокъ 1, и слѣдовательно надлежитъ также до втораго рода $3n+1$. Откуда видно, что всѣ квадратныя числа въ рассужденіи дѣлителей 3хъ, суть только двойкаго рода; ибо они, или на 3 могутъ раздѣлиться на цѣло, и тогда неопредѣнно раздѣляясь также и на 9, или ежели на 3 раздѣлиться не могутъ, то остатокъ бываетъ всегда 1, а 2 никогда; слѣдовательно ни одно число содержащееся въ формулѣ $3n+2$ квадратъ быть не можетъ.

869.

Изъ сего можемъ мы легко показывать, что формула $3xx+2$ никогда квадратомъ не будетъ, хотя бы вмѣсто x цѣлое, или ломаное число взято было; ибо когда x цѣлое число и формула $3xx+2$ на 3 раздѣлится, то останется 2, следовательно сія формула квадратъ быть не можетъ; но ежели x дробь, то положи ево $\frac{1}{u}$, о которой дроби можемъ мы принять, что она въ самой уже меншей видѣ приведена, и следовательно $\frac{1}{u}$ никакого общаго дѣлителя кромѣ 1 не имѣетъ.

Ежели бы $\frac{311}{111}+2$ было квадратное число, то помноживъ на 111, т. е. $311+211$ надлежало бы быть квадрату; но сему равнымъ образомъ спастись не лзя: ибо число 11, или можетъ на 3 раздѣлиться, или нѣтъ; ежели можетъ, то не раздѣ-

у 5

лится

лится g , по тому что иначе бы g и h общаго дѣлителя имѣли.

И такъ положивъ $u = 3f$ формула наша будетъ $3ii + 18ff$, кою раздѣленная на 3 даетъ $ii + 6ff$, кою пакки на 3 раздѣлиться не можетъ, какъ для квадрата требуется; ибо хотя $6ff$ и могутъ раздѣлиться, но ii , раздѣленное на 3 даетъ въ остаткѣ 1.

Но когда u на 3 раздѣлиться не можетъ, по смотри, что будетъ въ остаткѣ. Понеже первой членъ на 3 можетъ раздѣлиться, по все дѣло состоитъ только въ остаткѣ втораго члена; но теперь ii раздѣленное на 3, даетъ въ остаткѣ 1, или оно есть число сего рода $3n + 1$, по чему $2ii$ будетъ число сего рода $6n + 2$, и слѣдовательно раздѣленное на 3, даетъ остатокъ 2; чего ради формула наша $3ii + 2ii$ раздѣленная на 3, даетъ въ остаткѣ 2, и заподлинно квадратъ быть не можетъ.

870.

Такимъ же образомъ можно доказывать, что и сія формула $3n+5m$, никогда квадратовъ не будетъ, да и ни одна изъ сихъ $3n+8m$, или $3n+11m$, или $3n+14m$ и проч., гдѣ числа 5, 8, 11, 14 и проч. раздѣленные на 3, даютъ въ остаткѣ 2, ибо ссѣли бы n на 3 могло раздѣлиться; но 1 не можетъ. Положи $n=3f$, то бы формула раздѣлилась на 3, а на 9 нѣтъ. Если же n на 3 не дѣлимо, и слѣдовательно m есть число сего рода $3n+1$, то хотя бы первой членъ $3n$ на 3 и раздѣлился, но другой $5m$ сей формулы $15n+5$, или $8m$ изъ сей $24n+8$, или $11m$ изъ $33n+11$ и проч. раздѣливъ на 3 получится въ остаткѣ 2, и слѣдовательно квадратовъ быть не можетъ.

871.

Сіе самое бываетъ съ общою формулою $3n+(3n+2)m$, которая никогда квадратовъ не будетъ, да и тогда также, когда вмѣсто n положатся отрицатель-

ныя числа, такъ когда $n = -1$, то не возможно чтобъ сѣя формула $3n - 1$ была квадратомъ. Ибо ежели n на 3 дѣлится, то дѣло уже извѣстно, а когда бы n на 3 не дѣлилось, то было бы n число сего рода $3n + 1$ а формула наша $3n - 1$, которую раздѣливъ на 3, получится въ остаткѣ -1 , къ которой ежели приложится 3, выйдетъ $+2$. Положи вообще $n = +m$, будетъ наша формула $3m - (3m - 2)m$, которая никогда квадратъ быть не можетъ.

872.

Къ сему привело насъ разсужденіе дѣлителя 3хъ, разсмотримъ теперь дѣлителя 4; ибо тогда всѣ числа содержатся въ сихъ формулахъ,

I $4n$; II $4n + 1$; III $4n + 2$; IV $4n + 3$.

Чиселъ перваго роду квадратъ есть $16n^2$ и можетъ на 16 раздѣлиться, когда же число втораго рода $4n + 1$, то квадратъ его $16n^2 + 8n + 1$, которой раздѣливъ на 8, даетъ остатокъ 1 и надлежитъ

до формулы $8n + 1$; а ежели будетъ число
третьяго роду $4n + 2$, то квадратъ
онаго $16n^2 + 16n + 4$, которой раздѣливъ
на 16 получится въ остаткѣ 4; и слѣ-
довательно въ формулѣ $16n + 4$ содер-
жится; буде же наконецъ число четвер-
таго роду $4n + 3$, то квадратъ сего $16n^2$
 $+ 24n + 9$ которой раздѣливъ на 8, въ
остаткѣ будетъ 1.

873.

Изъ сего научаемся мы слѣдую-
щему: во первыхъ, что всѣ четныя ква-
дратныя числа въ формулѣ нашей $16n$,
или въ сей $16n + 4$ содержатся; слѣдо-
вательно всѣ остальные четныя форму-
лы, т. е. $16n + 2$, $16n + 6$, $16n + 8$,
 $16n + 10$, $16n + 12$, $16n + 14$, никогда
квадратами быть не могутъ.

Потомъ изъ нечетныхъ квадратовъ
усматриваемъ мы, что всѣ они въ фор-
мулѣ $8n + 1$ содержатся, или раздѣливъ
на 8 даюль въ остаткѣ 1, по сему
всѣ прочія нечетныя числа, которыя
въ

въ одной изъ сихъ формулъ $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ содержащихся квадратами быть не могутъ.

874.

По сему основанію можемъ мы паки показать, что формула $3ii+2iii$ квадратомъ не будетъ; ибо или оба числа суть нечетныя или одно четное а другое нечетное, потому что оба вдругъ четныя быть не могутъ, въ противномъ случаѣ 2 былъ бы ихъ общей дѣлитель; ежели оба нечетныя и слѣдовательно какъ ii такъ, и iii содержатся въ формулѣ $8n+1$, то первой членъ $3ii$ раздѣливъ на 8 далъ бы въ остаткѣ 3, а второй членъ 2, оба вмѣстѣ 5, и слѣдовательно не квадратъ. Но ежели бы i было четное число, а ii нечетное, то первой бы членъ $3ii$ раздѣлился на 4, а другой $2iii$ раздѣленной на 4 въ остаткѣ далъ бы 2, оба вмѣстѣ 2, и слѣдовательно не квадратъ. Если бы наконецъ ii было четное, а именно $=2g$, а i нечетъ слѣдовательно

ii

$11 = 8n + 1$, то наша формула была бы $24n + 3 + 8ss$, которую раздѣливъ на 8, получимся въ остаткѣ 3; и такъ квадратомъ быть не можетъ.

Равнымъ образомъ сіе доказательство можно употребить и въ сей формулѣ $31t + (8n + 2)u$, также и въ сей $(8m + 3)11 + 2uu$, да и въ сей также $(8m + 3)11 + (8n + 2)uu$, гдѣ вмѣсто m и n всѣ цѣлыя числа какъ положительныя такъ и отрицательныя брать можно.

875.

Такимъ же образомъ приступимъ мы далѣе къ дѣлителю 5, въ рассужденіи котораго всѣ числа содержатся въ одной изъ сихъ формулъ :

I) $5n$; II) $5n + 1$; III) $5n + 2$; IV) $5n + 3$; V) $5n + 4$.

Еслили число будетъ перваго роду, то его квадратъ есть $25m$, которой не только на 5, но и на 25 раздѣлился можетъ.

Будетъ же число будетъ втораго роду, то квадратъ его $25m + 10n + 1$, ко-
рой

рой раздѣливъ на 5, останется 1; и слѣдовательно въ формулѣ $5n+1$ содержится. Если же число прешьяго рода, то квадратъ онаго есть $25m+20n+4$, который раздѣливъ на 5 дастъ въ остаткѣ 4.

Когда же число четвертаго рода, то квадратъ его есть $25m+20n+9$, который раздѣливъ на 5 останется 4.

А еслии наконецъ будетъ число пятаго рода, то квадратъ онаго $25m+40n+16$, который раздѣливъ на 5 дастъ остатокъ 1. И такъ ежели квадратное число на 5 раздѣлиться не можетъ, то остатокъ бываетъ всегда или 1, или 4, а никогда 2 или 3; по чему въ сей формулѣ $5n+2$ и $5n+3$ квадратъ содержаться не можетъ.

876

По сему основанію можемъ мы также доказать, что ни формула $5m+2n$, ниже сія $5m+3n$ квадратами не будутъ, ибо и на 5 или дѣлимо или нѣтъ; въ первомъ

первомъ случаѣ сіи формулы могли сы-
раздѣлиться на 5, а на 25 нѣшл. слѣдо-
вательно квадратами быть не могутъ ;
но еслии и на 5 недѣлится, то ии равно
или $5n+1$, или $5n+4$; въ первомъ случаѣ
будетъ формула $5n+1$ или $5n+2$, которую
раздѣливъ на 5 останется 2, а другая
будетъ $5n+1$ или $5n+3$ которую когда раз-
раздѣливъ на 5, въ остаткѣ будетъ 3,
и слѣдовательно квадратами быть не мо-
жетъ. Но еслии $5n+3$, то первая
формула будетъ $5n+1$ или $5n+8$, которая
когда раздѣлится на 5, въ остаткѣ
будетъ 3, а другая $5n+1$ или $5n+12$, ко-
торую раздѣливъ на 5 останется 2; слѣ-
довательно и въ семъ случаѣ также ква-
дратами быть не можетъ.

Отсюда также явствуетъ, что
ни сія формула $5n+(5n+2)n$, ни-
же сія $5n+(5n+3)n$ квадратами не бу-
дутъ : ибо такіе же выдутъ остатки
какъ и прежде ; да можно также и въ
первомъ членѣ поставить $5m$, гдѣ
только m на 5 недѣлимо.

Томъ II.

Ф

877.

Всѣ четные квадраты въ формулѣ $4n$, а всѣ нечетные въ формулѣ $4n+1$ содержатся, и понеже ни $4n+2$, ни $4n+3$ квадрата быть не могутъ, по слѣдуетъ отсюда, что общая формула $(4m+3)n + (4n+3)m$ никогда квадратомъ не будетъ; ибо если бы t было четное число, то бы ti раздѣлилось на 4, а другой бы членъ раздѣленной на 4 оставилъ 3. Но когда оба числа t и n не четныя, то вышли бы остатки изъ ti и ni 1, слѣдовательно изъ цѣлой формулы осталось бы 2; но понеже нѣтъ ни одного числа, которое раздѣленное на 4 оставляетъ 2, было бы квадратное. При чемъ надлежитъ примѣчать, что какъ m , такъ и n , можно взять отрицательныя и о такомъ же; по чему ни формула $3n + 3ni$, ни $3n - ni$ квадратомъ быть не можетъ.

Когда мы изъ теперешнихъ дѣлителей нашли, что нѣкоторые роды чиселъ,

селъ , никогда квадратами быть не могутъ , но сіе самое имѣетъ также мѣсто и при всѣхъ другихъ дѣлителяхъ , а именно что есть нѣкоторые роды чиселъ , коихъ квадраты не возможны.

Пусть будетъ дѣлитель 7 , то всѣ числа въ слѣдующихъ 7 ми родахъ заключающіяся , которыхъ мы рассмотримъ также и квадраты.

роды чиселъ , ихъ квадраты принадлежатъ до рода

I.	$7n$	$49n$	$7n$
II.	$7n+1$	$49n+14n+1$	$7n+1$
III.	$7n+2$	$49n+28n+4$	$7n+4$
VI.	$7n+3$	$49n+42n+9$	$7n+2$
V.	$7n+4$	$49n+56n+16$	$7n+2$
IV.	$7n+5$	$49n+70n+25$	$7n+4$
VII.	$7n+6$	$49n+84n+36$	$7n+1$

Понеже квадраты , которые на 7 не дѣляшяся , содержатся въ одномъ изъ сихъ трехъ родовъ ; $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, то другіе 3 рода изъ свойства квадратовъ совсѣмъ исключаются , кои суть $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$. Причина сему

видна, пошому чшо всегда два рода чиселъ найши можно, коихъ квадраты надлежатъ до одного рода.

879.

Для уразумѣнія сего надлежитъ примѣчать, что послѣдней родъ $7n+6$ можетъ изъясниться также чрезъ $7n-1$, равнымъ образомъ формула $7n+5$, съ $7n-2$ одинаковы; такожде $7n+4$ то же, что и $7n-3$: но извѣстно чшо квадраты сихъ двухъ родовъ чиселъ $7n+1$ и $7n-1$ раздѣленные на 7, даютъ остатки одинакіе, а именно 1цу; подобнымъ образомъ также квадраты сихъ двухъ родовъ $7n+2$ и $7n-2$ одинаковы.

880.

И такъ вообще, какого бы свойства дѣлитель ни былъ, котораго означимъ мы буквою d , то произшедшія отсюда разныхъ родовъ числа, суть слѣдующія :

dn $dn+1$, $dn+2$, $dn+3$ и проч. $dn-1$, $dn-2$, $dn-3$ и проч.

гдѣ квадраты изъ $dn+1$ и изъ $dn-1$ сѣ общее имѣютъ, чпо раздѣленные на d даютъ остатокъ 1, и слѣдовательно оба надлежатъ до одного рода $dn+1$. равнымъ образомъ то же бываетъ съ обоими родами $dn+2$ и $dn-2$, коихъ квадраты надлежатъ до рода $dn+4$.

И по сему вообще то же дѣлается съ двумя родами $dn+a$ и $dn-a$, коихъ квадраты раздѣленные на d , даютъ одинакой остатокъ, а именно aa , или иной же остатокъ, какъ когда aa раздѣлено на d .

§81.

Симъ образомъ получился безконечное множество такихъ формулъ, какъ $att+bu$, кои никогда квадратами не будутъ; такъ изъ дѣлишеля 7ми, легко познается, что ни одна изъ сихъ фор-

Ф 3

мулъ

мулѣ $7ii + 3iii$; $7ii + 5iii$ и $7ii + 6iii$, никогда квадратами быть не можетъ; потому что и раздѣленное на 7, даетъ въ остаткѣ или 1, или 2, или 4. Потомъ изъ первой формулы остается или 3, или 6, или 5; а изъ второй или 5, или 3, или 6; изъ третьей или 6, или 5, или 3 чему ни при какомъ квадрата снаться не лзя. Если теперь такія формулы случатся, то тщетной будетъ трудъ попасть на такой случай, гдѣ бы могъ выйти квадратъ, и для того сіе разсужденіе есть великой важности.

Но ежели предложенная формула не такого свойства будетъ, и можно отгадать нѣкоторой случай, въ которомъ здѣлается она квадратомъ, то показано уже въ прежней главѣ, какимъ образомъ отсюда безконечное множество другихъ случаевъ находить должно.

Предложенная формула была собственно $axx + 1$, и понеже вмѣсто x находились обыкновенно дроби, для того клали мы $x = \frac{1}{a}$, такъ что сію формулу

аи

$ax + by$ квадратомъ здѣлать должно было.

Безконечное шакже множество бываетъ случаевъ гдѣ x и y въ самыхъ цѣлыхъ числахъ извѣявленъ быть можеть ; а какимъ образомъ оныя случаи находить , слѣдующая глава покажетъ.



ГЛАВА VI.

О случаяхъ , въ которыхъ формула $axx + b$ будетъ квадратъ въ цѣлыхъ числахъ.

882.

Видѣли уже мы , какимъ образомъ формулу $a + bx + cx$ переменять должно , чтобъ средней членъ уничтожился ; и по сему довольно будетъ съ насъ , когда мы настоящее разсужденіе къ сей только формулѣ $axx + b$ присвоимъ ; при чемъ примѣчать надлежитъ , что вмѣсто x одна цѣлая числа, изъ коихъ

Ф 4

фор-

формула квадрата́ будетъ, находить должно.

Прежде всего потребно здѣсь, чтобъ такая формула сама по себѣ была возможна ; ежели же она не возможна , то и положенныя вмѣсто x дроби , не упоминая о цѣлыхъ числахъ имѣть мѣста не могушъ.

883.

И такъ положи сию формулу $ax + b = y$, гдѣ буквы x и y цѣлыя числа быть должны, попому что a и b суть такія же.

На сей концѣ необходимо нужно знать или угадать одинъ случай въ цѣлыхъ числахъ, ибо иначе весь бы трудъ былъ тщетной, искать больше такихъ случаевъ, ежели бы случилось , что сама формула не возможна.

Положимъ что сѣя формула квадратомъ быть можеть , ежели положимся $x = f$, и пусть сѣ квадратъ будетъ $= gg$ такъ что $aff + b = gg$, гдѣ f и g извѣстныя числа, и слѣдовательно осталось перъ

перъ только , какимъ образомъ изъ сего случая другіе вывести можно сіе разысканіе шѣмъ важнѣе , чѣмъ больше оно трудностямъ подвержено , но кои мы преодолѣемъ слѣдующими пріемами.

884.

Найдено уже, что $aff + b = gg$ и сверхъ сего должно быть $ax + b = yy$, вычти прежне уравненіе изъ сего послѣдняго, то получится $ax - aff = yy - gg$, что въ множишеляхъ представишь можно такъ:

$a(x + f)(x - f) = (y + g)(y - g)$; помножь съ обѣихъ сторонъ на pq выдѣль $apq(x + f)(x - f) = pq(y + g)(y - g)$: но чтобы вывести отсюда равенство, то здѣлай сіе раздѣленіе $ap(x + f) = q(y + g)$ $q(x - f) = p(y - g)$, и изъ сихъ обоихъ уравненій ищи обѣ буквы x и y ; первое раздѣливъ на q дасть $y + g = \frac{apx + apf}{q}$, а второе раздѣ-

ливъ на p дасть $y - g = \frac{qx - qf}{p}$ сіе зычти изъ прежняго, останется $2g = \frac{f(qq + ppa) + c(apf - qp)}{qp}$ помноживъ на pq выдѣль $2pqg = (apf - qp)$
Ф 5 x

$$x + (arp + qq)f \text{ отсюда } x = \frac{2grq}{arp - qq} - \frac{(arp + qq)f}{arp - qq}$$

$$\text{а изъ сего попомъ найдется } y = g + \frac{2gqq}{arp - qq}$$

$$- \frac{(arp + qq)fq}{(arp + qq)r} - \frac{qf}{r}, \text{ гдѣ первые два члена}$$

содержать букву g , кои соединивъ вмѣстѣ даюшъ $\frac{g(arp + qq)}{arp - qq}$, а другіе два чле-

на имѣющъ букву f , и подъ однимъ знаменателемъ даюшъ $-\frac{2afpq}{arp - qq}$, слѣдова-

тельно y получится $= \frac{g(arp + qq) - 2afpq}{arp - qq}$.

885.

Сей трудъ кажется, что съ нашимъ намѣреніемъ не сходствуетъ; ибо здѣсь пришли мы къ ломаннымъ числамъ, когда намъ вмѣсто x и y цѣлыя числа искать должно; чего ради получили бы мы другой новый вопросъ, какія числа вмѣсто r и q взять надлежитъ, чтобы избѣжать дроби, которой вопросъ еще труднее кажет-

кажется нежели нашъ главной. Но можно здѣсь употребить другое искусство, коимъ мы легко наше намѣреніе достигнемъ ; ибо когда здѣсь все въ цѣлыхъ числахъ являеться должно , то положи

$$\frac{arp + qq}{arp - qq} = m \text{ и } \frac{2rq}{arp - qq} = n \text{ дабы имѣть } x = ng - mf, \text{ и } y = mg - n f. \text{ Здѣсь не можемъ}$$

мы взять m и n по изволенью ; но они такъ должны быть опредѣлены , чтобъ съ прежними опредѣленіями сходствовали. На сей конецъ рассмотримъ мы ихъ ква-

драты, и будетъ $mm = \frac{aar^2 + 2arqq + q^2}{aar^2 - 2arqq + q^2}$

а $nn = \frac{4rqq}{aar^2 - 2arqq + q^2}$; откуда найдемся

$$mm - ann = \frac{aar^2 + 2arqq + q^2 - 4arqq}{aar^2 - 2arqq + q^2}$$

$$= \frac{aar^2 - 2arqq + q^2}{aar^2 - 2arqq + q^2} = 1.$$

886.

Изъ сего явствуетъ , что числа m и n такого свойства быть должны , чтобъ $mm - ann = 1$; но понеже a есть

извѣстное число, то прежде всего надлежитъ найти вмѣсто n такое цѣлое число, чтобъ $ant + 1$ было квадратъ, котораго корень есть m , а какъ скоро оно найдется и сверхъ того еще число f , чтобъ $aff + b$ было квадратъ т. е. gg , то получатся вмѣсто x и y слѣдующія величины въ цѣлыхъ числахъ; $x = ng - mf$, $y = mg - af$, откуда $axx + b = yy$.

887.

Само собою явствуетъ, что когда однажды n найдено, то можно вмѣсто его поставить $-n$, потому что квадратъ онаго n^2 есть одинаковъ.

Для нахождения x и y въ цѣлыхъ числахъ, чтобы $axx + b = yy$ было, надлежитъ прежде всего знать такой случай, чтобъ $aff + b = gg$ и какъ скоро сей случай извѣстенъ будетъ, то должно еще къ числу a найти такія числа m и n , чтобъ $ant + 1 = mm$ было; о чемъ въ слѣдующемъ показано будетъ. Когда же сіе здѣлано будетъ, то получится заразъ новой слу-

случай , а именно $x = ng + mf$ и $y = mg + nf$, и будетъ $axx + b = y$.

Поставь сей новой случай на мѣстѣ^о прежняго, которой былъ взятъ за извѣстной, и напиши $ng + mf$ вмѣсто f , а $mg + nf$ вмѣсто g , то получится вмѣсто x и y новыя паки знаменованія, изъ которыхъ еще, когда они вмѣсто f и g поставятся, другія новыя выдутъ и такъ далѣе: такъ что ежели съ начала одинъ только такой случай былъ извѣстенъ, то изъ онаго бесконечно много другихъ найши можно.

888.

Способъ доходить до сего рѣшенія нарочито труденъ, и казался съ начала не соотвѣтствовать нашему намѣренію, ибо мы нашли нарочито збивчивыя дроби кои особливѣмъ щастіемъ умножить удалось, и такъ не худо, ежели мы еще другой путь покажемъ, который ведетъ насъ къ слѣдующему рѣшенію.

Когда должно быть $axx + b = yy$, и найдено уже $aff + b = gg$, то изъ онаго уравненія будемъ $b = yy - axx$; а изъ сего $b = gg - aff$.

Слѣдовательно $yy - axx = gg - aff$, и теперь дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ изъ извѣстныхъ чиселъ f и g найти неизвѣстныя x и y , и тогда сразу видно, что сіе уравненіе получится, когда положишь $x = f$ и $y = g$, но отсюда ни одного новаго случая не получишь кромѣ того, которой взяли за извѣстной.

Для того положимъ, что вмѣсто n такое число найдено, что $ann + 1$ есть квадратъ, или что $ann + 1 = mm$, откуда будетъ $mm - ann = 1$. Сямъ умножь прежняго уравненія часть $gg - aff$ будемъ $yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$. На сей конецъ положи $y = gm + afn$ получишь $ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx - ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$, гдѣ члены $ggmm$ и $aaffnn$ уничтожаются, и слѣдовательно выйдетъ axx

$axx = affmt + aggn + 2afgmt$, которое уравненіе раздѣливъ на a получится $xx = ffmt + ggn + 2fgmt$, коюрая формула, какъ видно, есть квадратъ и найдется $x = fm + gn$, что съ прежде найденною формулою согласуется.

890.

Сіе рѣшеніе потребно изъяснить, нѣкоторыми примѣрами.

Вопросъ. Найми всѣ цѣлыя числа вмѣсто x , такъ чтобъ $2xx - 1$ было квадратъ, или чтобъ $2xx - 1 = yy$. Здѣсь $a = 2$ и $b = -1$; первой случай потчасъ виденъ, ежели возмется $x = 1$ и $y = 1$, изъ сего извѣстнаго случая имѣемъ мы $f = 1$ и $g = 1$; но требуется еще найми такое число вмѣсто n , чтобъ $2nn + 1$ было квадратъ, а именно mt . Сіе учинится, когда $n = 2$ и $t = 3$. По сему изъ каждаго извѣстнаго случая f и g сей новой находимъ: $x = 3f + 2g$ и $y = 3g + 4f$; но извѣстной случай есль $f = 1$ и $g = 1$, для того слѣдующіе новые случаи найдутся.

 $x = f$

$$\begin{array}{l} x = f = 1 \mid 5 \mid 29 \mid 169 \\ y = g = 1 \mid 7 \mid 41 \mid 239 \text{ и проч.} \end{array}$$

891.

Вопросъ. Найти всѣ преугольные числа, которыя бы были вдругъ и квадратныя?

Пусть будетъ z корень преугольнаго числа, по самой преугольницѣ $\frac{xz + z}{2}$, которой квадратъ быть долженъ, и когда корень онаго будетъ x , то $\frac{xz + z}{2} = xx$, помножь на 8 выдѣль $4xz + 4z = 8xx$; придай съ обѣихъ сторонъ 1, получится $4xz + 4z + 1 = (2x + 1)^2 = 8xx + 1$. Дѣло состояишь теперь въ томъ, чтобъ $8xx + 1$ было квадратъ и положивъ $8xx + 1 = yy$ будемъ $y = 2x + 1$; слѣдовательно искомой преугольника корень $z = \frac{y^2 - 1}{8}$; здѣсь $a = 8$ и $b = 1$ и извѣстной случай виденъ; а именно $f = 0$ и $g = 1$; а что бы еще было $8m + 1 = m^2$, то $n = 1$ и $m = 3$, откуда получится $x = 3f + g$ и $y = 3g + 8f$, а $z = \frac{y^2 - 1}{8}$. Отсюда получаемъ мы слѣдующія рѣшенія:

$$x = f$$

$$\begin{array}{l} x = f = 0 \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 35 & 204 \\ 3 & 17 & 99 & 577 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1189 \\ 3363 \end{array} \\ y = g = 1 \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 35 & 204 \\ 3 & 17 & 99 & 577 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1189 \\ 3363 \end{array} \\ z = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 35 & 204 \\ 3 & 17 & 99 & 577 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1189 \\ 3363 \end{array} \text{ и проч.} \end{array}$$

892.

Вопросъ Найти всѣ пятиугольные числа, которые бы были также и квадраты?

Пусть будетъ корень пятиугольныхъ z , то пятиугольникъ самъ $\frac{5z^2 - z}{2}$, которой пусть будетъ равенъ квадрату x ; чего ради $3zz - z = 2xx$, помножь на 12 и придай 1, выдешъ $36zz - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z - 1)^2$, положи теперь $24xx + 1 = y$. будетъ $y = 6z - 1$ и $z = \frac{y+1}{6}$; но понеже здѣсь $a = 24$, $b = 1$, то извѣстной случай $f = 0$ и $g = 1$. Потомъ должно быть $24m + 1 = m^2$, то возми $n = 1$, будетъ $m = 5$; и такъ получаемъ мы $x = 5f + g$, $y = 5g + 24f$ и $z = \frac{y+1}{6}$, или тогда $y = 1 - 6z$, то будетъ также $z = \frac{1-y}{6}$; откуда найдутся слѣдующія рѣшенія.

Табль II.

X

$x = f$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
 x = f = 0 & 1 & 10 & 99 & 980 \\
 y = g = 1 & 5 & 49 & 485 & 4801 \\
 z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{6} & 1 & \frac{25}{6} & 81 & \frac{2401}{6} \\
 \text{или } z = \frac{1-y}{6} = 0 & \frac{2}{3} & -8 & -\frac{102}{3} & -800.
 \end{array}$$

893.

Вопросъ. Найми всѣ квадраты въ цѣлыхъ числахъ, кои когда помножатся на 7, и къ произведенію придастся 2 тобѣ вышли паки квадраты?

Здѣсь требуется, чтобѣ $7xx + 2 = y^2$, гдѣ $a = 7$, $b = 2$, извѣстной случай попадется, когда $x = 1$, будстѣ $x = f = 1$ и $y = g = 3$, разсмотрѣвъ уравненіе $7m + 1 = n^2$ легко найдется, что $n = 3$ и $m = 8$, слѣдовательно $x = 8f + 3g$ и $y = 8g + 21f$, откуда выдутѣ вмѣсто x и y слѣдующія означенія:

$$\begin{array}{l|l|l}
 x = f = 1 & 17 & 271 \\
 y = g = 3 & 45 & 717.
 \end{array}$$

894.

Вопросъ. Найми всѣ преугольные числа, кои бы были вдругѣ и пятиугольные?

Пусть

Пусть корень треугольных $= p$, а
 пятиугольных $= q$, то должно быть
 $\frac{pp+p}{2} = \frac{3qq-q}{2}$, или $3qq-q=pp+p$; от-

сюда ищи q : понеже $qq = \frac{1}{3}q + \frac{pp+p}{3}$,
 то $q = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{pp+p}{3}\right)}$ т. е. $q = \frac{1+\sqrt{12pp+12p+1}}{6}$
 и дѣло состоятъ въ томъ, чтобъ $12pp$
 $+ 12p + 1$ было квадратъ, и при томъ въ
 цѣлыхъ числахъ; понеже здѣсь средней
 членъ $12p$ попадаетъ, то положи $p = \frac{x-1}{2}$,
 чрезъ что получимъ мы $12pp = 3xx - 6x$
 $+ 3$ и $12p = 6x - 6$, слѣдовательно $12pp$
 $+ 12p + 1 = 3xx - 2$, что должно быть
 квадратъ. Положимъ еще $3xx - 2 = yy$,
 выдемъ $p = \frac{x-1}{2}$ и $q = \frac{1+\sqrt{3xx-2}}{6}$ и все дѣло со-
 состоятъ въ формулѣ $3xx - 2 = yy$, гдѣ $a=3$,
 $b=-2$ и извѣстной случай $x=f=1$,
 $y=g=1$. Потомъ для уравненія mt
 $= 3nt + 1$ имѣемъ мы $n=1$ и $m=2$;
 откуда слѣдующія величины, вмѣсто x и
 y , а помочью вмѣсто p и q получаются.

И такъ когда $x=2f+g$ и $y=2g+3f$
 будемъ

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 x=f=1 & 3 & 11 & 41 \\
 y=g=1 & 5 & 19 & 71 \\
 p=0 & 1 & 5 & 20 \\
 q=\frac{1}{3} & 1 & \frac{10}{3} & 12 \\
 \text{или } q=0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{25}{3}
 \end{array}$$

потому что $q=\frac{1-2}{3}$.

895.

До сихъ мѣстъ принуждены были мы изъ предложенной формулы исключать второй членъ, когда онъ попадался; но можно также предписанной способъ употребить и къ такой формулѣ, гдѣ будетъ средней членъ, что мы здѣсь показать намерены. Пусть предложенная формула, которая должна быть квадратъ, будетъ сія $axx+bx+c=yy$ и пусть будетъ изъ оной случай уже извѣстенъ $aff+bf+c=gg$; вычти сіе уравненіе изъ прежняго, будетъ $a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg$, что во множителяхъ изобразится такъ: $(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g)$, умножь съ обѣихъ сторонъ на pq , будетъ $pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g)$, что на двѣ части раздроблено быть можетъ:

I $p(x-f) = q(y-g)$; II $q(ax+af+b) = p(y+g)$ умножь первое уравненіе на p , а другое на q , и вычти прежнее изъ сего, то получится $(aqq - pp)x + (aqq + pp)f + bqq - 2pqr$; отсюда найдемъ мы $x = \frac{2pqr}{aqq - pp} - \frac{(aqq + pp)f + bqq}{aqq - pp}$, а изъ другаго уравненія будемъ $q(y-g) = p(x-f) = p\left(\frac{2pqr}{aqq - pp} - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bqq}{aqq - pp}\right)$; слѣдовательно $y-g = \frac{2pqr}{aqq - pp} - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bqq}{aqq - pp}$ итакъ $y = g + \frac{(aqq + pp)}{aqq - pp} - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bqq}{aqq - pp}$; а для избѣжанія сихъ дробей, положи какъ и прежде $\frac{aqq + pp}{aqq - pp} = m$ и $\frac{2pq}{aqq - pp} = n$, будемъ $m + 1 = \frac{2aqq}{aqq - pp}$, слѣдовательно $\frac{qq}{aqq - pp} = \frac{m+1}{2a}$, итакъ $x = ng - pf - b \frac{(m+1)}{2a}$, а $y = mg - paf - \frac{1}{2}bn$, гдѣ

X 3

буквы

буквы m и n такого свойства быть должны, какъ и выше сего, т. е. чтобъ $mm = ann + 1$.

8;6.

Но такимъ образомъ, найденныя формулы, вмѣсто x и y смѣшаны еще съ дробями; ибо члены содержащiе букву b сунтъ дроби, и слѣдовательно съ нашимъ намѣренiемъ не сходны. Но надлежитъ примѣчать, что ежели онѣ сихъ величинъ къ слѣдующимъ придешь, то оныя всегда будутъ цѣлыя числа, и коимъ изъ прежде взятыхъ чиселъ p и q очень легко найтти можно; ибо возьми p и q , такъ чтобъ $pp = aqq + 1$, и тогда $aqq - pp = -1$, то сами собою дроби пропадутъ, и найдется $x = -2gprq + f(aqq + pp) + bqq$, а $y = -g(aqq + pp) + 2afprq + brq$; но понеже въ извѣстномъ случаѣ $2ff + bf + c = gg$, квадратъ только изъ gg входящъ, то все равно дастъ ли буква g знакъ $+$, или $-$; и такъ поставь $-g$, вмѣсто g , то будутъ наши формулы $x = 2gprq + f(aqq + pp) + brq$ и $y = g(aqq + pp) + 2afprq + brq$ и тогда заодно будетъ $axx + bxy + c = yy$.

Сыскапъ

Сыскавъ на прим. такіа шестугольныя числа, кои бы были вдругъ и квадратныя?

Здѣсь должно быть $2xx - x = yy$, гдѣ $a=2$, $b=-1$, и $c=0$, извѣстной случай, какъ видно есть $x=f=1$ и $y=g=1$.

Пономъ надлежитъ быть $pp = 2qq + 1$.
Будетъ $q=2$ и $p=3$, и такъ получится $x=17g+17f-4$ а $y=17g+24f-6$, откуда слѣдующія найдутся знаменованія:

$$\begin{array}{l|l|l} x=f=1 & 25 & 841 \\ y=g=1 & 35 & 1189 \text{ и проч.} \end{array}$$

897.

Поведемъ еще нѣсколько при первой формулѣ, гдѣ средняго члена нѣтъ и рассмотримъ случаи, въ которыхъ формула $axx+b$, будетъ квадратъ въ цѣлыхъ числахъ.

Пусть будетъ $axx+b=yy$ и къ сему потребны двѣ вещи.

I. Знать такой случай, въ которомъ сіе дѣлается: оной пусть будетъ $eff+b=gg$.

X 4

II.

II. Надлежитъ знать вмѣсто m и n такія числа, чинобъ $mm = ann + x$, о чемъ въ слѣдующей главѣ показано будетъ

Отсюда теперь получается новый случай, а именно: $x = ng + mf$ и $y = mg + af$, откуда попомъ равнымъ образомъ другіе случаи сыскашь можно. Кемъ представимъ такъ:

$$\begin{array}{l} x = f | A | B | C | D | E \\ y = g | P | Q | R | S | T \text{ и проч.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{дѣ} \quad A = ng + mf | B = nP + mA | C = nQ + mB | D = nR + mC \\ \quad \quad P = mg + af | Q = mP + aPA | R = mQ + aBn | S = mR + mC \end{array}$$

и проч.

которые оба рода чиселъ, легко можно продолжать далѣе, какъ кто пожелаетъ.

898.

Но по сему способу не можно продолжать верхняго ряду не зная нижняго, ниже нижняго, не зная верхняго. Но легко можно дать правило, верхней рядъ одинъ только продолжать не имѣя нужды знать
нижней

нижней, которое правило служитъ также, и для нижняго ряду гдѣ не нужно, знать верхней. Цѣлыя числа, которыя вмѣсто x брать можно, идущіе въ извѣстной прогрессіи, коей каждой членъ напр. E , изъ двухъ предъидущихъ C и D опредѣляется, не имѣя нужды знать нѣкихъ членовъ R и S ; ибо тогда $E = 2mD - mnC + anC$ или $E = 2mD - (mn - an)C$, а понеже $mn = an + 1$, слѣдовательно $mn - an = 1$, будетъ $E = 2mD - C$. Откуда явствуетъ, какимъ образомъ каждое изъ верхнихъ чиселъ опредѣляется изъ двухъ предъидущихъ. равнымъ образомъ тоже бываетъ и съ нижнимъ рядомъ; такъ $T = mS + anD$, но $D = nR + mC$, будетъ $T = mS + an(nR + mC)$, и когда еще $S = mR + anC$, то $anC = S - mR$, которую величину поставивъ вмѣсто anC получимъ, $T = 2mS - R$, такъ что нижней рядъ по тому же правилу, какъ и верхней продолжается.

Найти наприм. всѣ числа x , чтобъ $2xx - 1 = yy$, здѣсь $f = 1$ и $g = 1$, при томъ

$X \text{ } \zeta$
 mn

$mm - 2m + 1$, Оудств $n = 2$ и $m = 3$. И по-
неже $A = 5$, то первые два члена 1 и 5,
изъ которыхъ слѣдующіе по сему прави-
лу найдутся: $E = 6 D = C$, т.е. каждый
членъ взятой 6 разъ и уменьшенъ предъ-
идущимъ дастъ слѣдующей; и такъ иско-
мая числа вмѣсто x идутъ по сему пра-
вику такимъ образомъ: 1, 5, 29, 169,
985, 5741 и проч.; откуда видно, что
сти числа безконечно далеко продолжаться
могутъ. А ежели бы захотѣли взять
дроби, то по преждепоказанному спо-
собу еще бы безконечно большее множе-
ство найти можно было.



ГЛАВА VII.

О особливомъ способѣ, формулу $am + 1$
здѣлать квадратомъ въ цѣлыхъ числахъ.

899.

Предложеннаго въ прежней главѣ въ
дѣйство произвѣсть не лзя, ежели не
въ состоянїи найти для каждаго числа a
такого

такого n , что бы $ant+1$ было квадратъ, или чтобъ $ant+1=mm$.

Когда же пожелаешь довольствоваться ломаными числами, то сие уравненіе легко рѣшить можно. Ибо положи только $m=1+\frac{nr}{q}$, будетъ $mm=1+\frac{2nr}{q}+\frac{nnrr}{qq}=ant+1$, гдѣ на обѣихъ сторонахъ 1 уничтожается; а остальные члены на n могутъ раздѣлиться. Помомъ помноживъ на qq выдетъ $2rq+nr=anqq$, откуда найдется $n=\frac{2rq}{anq-r}$, откуда безконечное множество знаменованій вмѣсто n найдется. Но понеже n цѣлое число быть должно, то сие намъ нисколько не помогаетъ, и слѣдовательно для нахождения его надлежитъ употребить совсемъ особый способъ.

900.

Прежде всего надлежитъ примѣчать, что ежели $ant+1$ должно быть квадратъ въ цѣлыхъ числахъ, какое бы a число

ни было, то сему не всегда спастись можно: ибо во первыхъ всѣ тѣ случаи исключаются, въ которыхъ a отрицательное число, потомъ также и всѣ п.ѣ, гдѣ a квадратъ. Понеже тогда ant было бы квадратъ, но никакой квадратъ ab и вмѣстѣ квадрата въ цѣлыхъ числахъ не дѣлается, и по сему формула наша должна быть такъ ограничена, чтобъ буква a , не была ни отрицательною, ни квадратомъ; но когда a есть положительное и при томъ не квадратное число, то можно завсегда вмѣсто a и такое цѣлое найти число, чтобъ $ant + 1$ было квадратъ.

Естьли такое число сыскано, то изъ прежней главы легко можно вывести безконечно много другихъ, но къ нашему намѣренію довольно будетъ найти нѣкоторыя и при томъ самыя малыя.

901.

Для сего нѣкогда ученой Англичанинъ и матемъ Пелъ весьма остроумной способъ изобрѣлъ, которой мы здѣсь
изъ

изъяснить намѣрены. Оной есть такого свойства, что не для каждаго числа n вообще, но для каждаго случая его особливо употреблять можно. И такъ начнемъ съ послѣднихъ случаевъ и будемъ искать вмѣсто n такое число, чтобъ $2nn+1$ квадратъ было, или чтобъ $\sqrt{(2nn+1)}$ было извлекаемое число.

Здѣсь легко видѣть можно, что сей квадратной корень будетъ больше нежели n , а менѣе нежели $2n$; что ради положи его $=n+p$, гдѣ p заподлинно должно быть меньше нежели n . И такъ имѣемъ мы $\sqrt{(2nn+1)}=n+p$, слѣдовательно $2nn+1=n^2+2np+pp$, откуда найдемъ n ; но $nn=2np+pp-1$, слѣдовательно $n=p+\sqrt{(2pp-1)}$.

Здѣсь главное дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ $2pp-1$ было квадратъ, что учинится положивъ $p=1$, и найдемъ $n=2$, а $\sqrt{(2nn+1)}=3$. Ежели бы сіе не такъ скоро вышло, то можно бы продолжать далѣе, и когда $\sqrt{(2pp-1)}$ больше нежели p и слѣдовъ n больше нежели $2p$, то
положи

положи $n = 2p + q$ и будетъ $2p + q = r + \sqrt{(2pr - 1)}$, или $p + q = \sqrt{(2pr - 1)}$ взявъ квадраты получимся $pp + 2pq + qq = 2pr - 1$, или $pp = 2pq + qq + 1$, будетъ $p = q + \sqrt{(2qq + 1)}$, и такъ $2qq + 1$, должно быть квадратное число, что учинится когда $q = 0$, следовательно $p = 1$ и $n = 2$. Изъ сего примѣра можно уже имѣть понятие о семъ способѣ, которой еще больше изъясненъ будетъ въ слѣдующаго.

§ 2.

Пусть будетъ $a = 3$ и что сія формула $3nn + 1$ должна быть квадратъ, по положи $\sqrt{(3nn + 1)} = n + p$ будетъ $3nn + 1 = nn + 2np + pp$ и $2nn = 2np + pp - 1$, отсюда $n = \frac{p + \sqrt{(3pp - 2)}}{2}$, но понеже $\sqrt{(3pp - 2)}$ больше нежели p и следовательно n больше, нежели $\frac{p}{2}$ или p , то положи $n = p + q$, будетъ $2p + 2q = p + \sqrt{(3pp - 2)}$ или $p + 2q = \sqrt{(3pp - 2)}$, взявъ квадраты выдемъ $pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2$, или $2pp = 4pq + 4qq + 2$ т. е. $pp = 2pq + 2qq + 1$; по чему $p = q + \sqrt{(3qq + 1)}$ сія формула данной равна, и
слѣдо-

слѣдовательно $q = 0$, откуда $p = 1$,
 $n = 1$ и $V(3n + 1) = 2$.

903.

Пусть будетъ $a = 5$ и формулу $5n + 1$ здѣлать квадратами, котораго корень больше, нежели $2n$, то положи $V(5n + 1) = 2n + p$ и получимся $5n + 1 = 4n + 4np + pp$, а $n = 4np + pp - 1$, слѣдовательно $n = 2p + V(5pp - 1)$. Но понеже $V(5pp - 1)$ больше нежели $2p$, то и n также больше нежели $4p$; чего ради возьми $n = 4p + q$, будетъ $2p + q = V(5pp - 1)$ или $4pp + 4pq + qq = 5pp - 1$; откуда $pp = 4pq + qq + 1$, почему $p = 2q + V(5qq + 1)$ сѣс учинится когда $q = 0$, слѣдовательно $p = 1$ и $n = 4$ и такъ $V(5n + 1) = 9$.

904.

Положимъ еще $a = 6$, чтобы $6n + 1$ было квадратъ, коего корень больше нежели $2n$, то возьми $V(6n + 1) = 2n + p$ будетъ $6n + 1 = 4n + 4np + pp$ или $2n = 4np + pp - 1$, слѣдов. $n = p + \frac{V(6pp - 2)}{2}$

или $n = \frac{2p + V(6pp - 2)}{2}$; почему и больше

нежели

нежели $2p$; для того положи $n = 2p + q$ будетъ $4p + 2q = 2p + \sqrt{6pp - 2}$, или $2p + 2q = \sqrt{6pp - 2}$: взявъ квадраты выдетъ $4p + 8pq + 4qq = 6pp - 2$, или $2pp = 8pq + 4qq + 2$, или $pp = 4pq + 2qq + 1$; отсюда найдется $p = 2q + \sqrt{6qq + 1}$, которая формула первой равна и слѣдов. можно положить $q = 0$, выдетъ $p = 1$, $n = 2$ по чему $\sqrt{6nn + 1} = 5$.

905.

Пусть еще $a = 7$ и $7nn + 1 = mm$, слѣдов. m больше нежели $2n$; чего ради положи $m = 2n + p$, будетъ $7nn + 1 = 4nn + 4np + pp$, или $3nn = 4np + pp - 1$; отсюда найдется $n = \frac{2p + \sqrt{7pp - 3}}{3}$; но понеже n больше нежели $\frac{1}{3}p$ и слѣдов. больше нежели p , то возьми $n = p + q$, будетъ $p + 3q = \sqrt{7pp - 3}$; взявъ квадраты выдетъ $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$; $6pp = 6pq + 9qq + 3$, или $2pp = 2pq + 3qq + 1$, отсюда найдется $p = \frac{q + \sqrt{7qq + 2}}{2}$, но понеже здѣсь p больше нежели $\frac{1}{2}q^2$, и слѣдов. больше

нежели q , то поставь $p = q + r$.
 будетъ $q + 2r = \sqrt{(7qq + 2)}$ взявъ квадра-
 ты $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$, или $6qq = 4qr$
 $+ 4rr - 2$, или $3qq = 2qr + 2rr - 1$, по чему най-
 дется $q = \frac{r + \sqrt{(7rr - 1)}}{3}$; но понеже q
 больше нежели r , то положи $q = r + s$,
 будетъ $2r + 3s = \sqrt{(7rr - 3)}$ взявъ квадра-
 ты $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$ или $3rr - 12rs$
 $+ 9ss + 3$ и $rr = 4rs + 3ss + 1$ слѣдов.
 $r = 2s + \sqrt{(7ss + 1)}$, и сія формула пре-
 жней равна, то возми $s = 0$ и получится
 $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ и $n = 3$ откуда $m = 8$.

Сіе изчисленіе можно сократить слѣ-
 дующимъ образомъ, что и въ другихъ
 случаяхъ мѣсто имѣетъ. Когда $7mn + 1$
 $= m^2$, то m меньше нежели $3n$, чего
 ради возми $m = 3n - p$, будетъ $7mn + 1$
 $= 9mn - 6np + pp$, или $2mn = 6np - pp + 1$,
 откуда $n = \frac{3p + \sqrt{(7pp + 1)}}{2}$, слѣдоват. n
 меньше нежели $3p$; для того положи $n = 3p$
 $- q$ будетъ $3p - 2q = \sqrt{(7pp + 1)}$, взявъ
 квадраты $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 1$ или
 $2pp = 12pq - 4qq + 1$ и $pp = 6pq - 2qq + 1$;
 откуда $p = 3q + \sqrt{(7qq + 1)}$, здѣсь за-
 томъ II. Ц разб

разъ поставить можно $q=0$, будетъ $r=1$
и $n=3$, наконецъ $m=8$ какъ и прежде.

906.

Возмемъ еще $a=8$ такъ чтобы $8m+1=mm$, по чему m меньше нежели 32, для того положи $m=3n-r$, будетъ $8m+1=9nn-6nr+rr$, или $nn=6nr-r^2+1$; откуда $n=3r+V(8rr+1)$, которая формула равна первой, по можно положить $r=0$, и получится $n=1$, а $m=3$.

907.

Равнымъ образомъ поступай съ каждымъ другимъ числомъ a , ежели только оно положительное и не квадратъ, по придеши на конецъ на такой коренной знакъ, которой съ предложенною формулою сходенъ, какъ напримсей $V(ait+1)$, гдѣ должно положить $t=0$, въ которомъ случаѣ неизвлекаемость пропадетъ, а попомъ возвращаясь назадъ получишь величину для n , чтобы $ait+1$ было квадратъ.

Иногда

Иногда скоро можно дойти до желаемого, а иногда многія къ пюму дѣйствія пребудутся по состоянію числа a , о которомъ извѣстныхъ признаковъ данъ не можно, до числа 13 идетъ нарочито скоро; а когда $a=13$, то вычисленіе будетъ гораздо пространнѣе, и для того не худо изъяснить сей случай подробнѣе.

908.

И по сему пусть будетъ $a=13$, такъ что должно быть $13m+1=m$, понеже здѣсь m больше нежели $9m$, слѣдов. m больше нежели $3n$, то возми $m=3n+r$, будетъ $13n+1=9m+6nr+rr$, или $4m=6nr+rr-1$, откуда $n=\frac{3r+\sqrt{(13rr-4)}}{4}$ по чему n больше нежели $\frac{r}{4}$, и слѣдов. больше нежели r , то положи $n=r+q$, выдешъ $r+4q=\sqrt{(13rr-4)}$; взявъ квадраты $13rr-4=rr+8rq+16qq$, $12rr-8rq+16qq+4$ раздѣливъ н^о 4, $3rr=2rq+4qq+1$, откуда $r=\frac{q+\sqrt{(13q+3)}}{3}$. Здѣсь r больше нежели $\frac{q+1}{3}$, слѣдов. больше нежели q ; и такъ возми $r=q+t$ будетъ $2q+3t=\sqrt{(13qq+3)}$ взявъ, квадраты,

Ц 1

13qq

$13qq + 3 = 4qq + 12qr + 9rr$, т. е. $9qq = 12qr + 9rr - 3$, раздѣливъ на 3, $3qq = 4qr + 3rr - 1$, откуда $q = \frac{2r + \sqrt{13rr - 31}}{3}$, гдѣ q больше нежели $\frac{2r}{3} + \frac{3r}{3}$, и слѣдов. больше нежели r , чего ради положи $q = r + s$ будетъ $r + 3s = \sqrt{13rr - 31}$; взявъ квадраты $13rr - 3 = rr + 6rs + 9ss$, или $12rr = 6rs + 9ss + 3$. раздѣливъ на 3, $4rr = 2rs + 3ss + 1$, отсюда $r = \frac{s + \sqrt{13ss + 1}}{2}$. Здѣсь r больше нежели $\frac{s}{2} + \frac{3s}{2}$, или s , для того возми $r = s + t$, будетъ $3s + 4t = \sqrt{13ss + 4}$; взявъ квадраты $13ss + 4 = 9ss + 24st + 16tt$ и $4ss = 24st + 16tt - 4$, раздѣливъ на 4 получимся $ss = 6st + 4tt - 1$, почему $s = 3t + \sqrt{13tt - 1}$, и слѣд. s больше нежели $3t + 3t$, или $6t$, чего ради положи $s = 6t + u$. будетъ $3t + u = \sqrt{13tt - 1}$; взявъ квадраты, $13tt - 1 = 9tt + 6tu + uu$, откуда $4tt = 6tu + uu + 1$ и $t = \frac{uu + \sqrt{13uu + 1}}{4}$, гдѣ t больше нежели $\frac{6u}{4}$, и слѣдов. больше нежели u , для того положи $t = u + v$, будетъ $u + 4v = \sqrt{13uu + 4}$; взявъ квадраты получимся $13uu + 4 = uu + 8uv + 16vv$ и $12uu = 8uv + 16$

$+16vw-4$, раздѣливъ на 4, выйдетъ $3uv$
 $= 2uv + 4vw - 1$; почему $u = \frac{1+V(1-4v-3)}{2}$,
 гдѣ u больше нежели $\frac{1}{2}v$, и слѣдов.
 больше нежели v , по положи $u = v + x$,
 будетъ $2v+3x = V(13vv-3)$, взявъ ква-
 драаты $13vv-3 = 4vv + 12vx + 9xx$, или
 $9vv = 12vx + 9xx + 3$, раздѣливъ на 3,
 $3vv = 4vx + 3xx + 1$, откуда $v = \frac{2x+V(1-3xx+3)}{2}$,
 гдѣ v больше нежели $\frac{1}{2}x$, и слѣдов. боль-
 ше нежели x , для того положи $v = x + y$,
 будетъ $x+3y = V(13xx+3)$ взявъ ква-
 драаты $13xx+3 = 4x+6xy+9yy$, или
 $12xx = 6xy + 9yy - 3$, раздѣливъ на 3
 выйдетъ $4xx = 2xy + 3yy - 1$ и $x = \frac{y+V(1-2y-4)}{2}$,
 гдѣ x больше нежели y , для того поло-
 жи $x = y + z$, будетъ $3y+4z = V(13yy+4)$,
 взявъ квадраты $13yy+4 = 9yy+24yz+16zz$,
 или $4yy = 24yz + 16zz + 4$; раздѣливъ на 4
 $yy = 6yz + 4zz + 1$, откуда $y = 3z + V$
 $(13zz+1)$ и сія формула наконецъ ра-
 вна первой, по положи $z=0$ и возвра-
 щаясь назадъ, получишь какъ слѣдуетъ:

$$z=0$$

$$y=1$$

$$x=1+z=1$$

$$v=x+y=2$$

$$\text{Ц } 3$$

$$u=v$$

$$u = v + x = 3$$

$$t = u + v = 5$$

$$s = 6t + u = 33$$

$$r = s + t = 38$$

$$q = r + s = 71$$

$$p = q + r = 109$$

$$n = p + q = 180$$

$$m = 3n + p = 649$$

слѣдов. 180 послѣ o есть самое меньшее цѣлое число вмѣсто n , чѣмбъ $13n + 1$ было квадратъ.

909.

Изъ сего примѣра довольно явствуетъ, сколь продолжительно иногда такое вычисленіе бываетъ, а въ большихъ еще числахъ требуется въ десять разъ больше дѣла, нежели сколько было при числѣ 13, да и неможно напередъ видѣть при какихъ числахъ столь великой трудъ надобенъ; для того труды другихъ надлежитъ употребляти въ свою пользу и здѣлать таблицу, гдѣ для всѣхъ чиселъ, а отъ 1 до 100 значенія буквъ m и n изображены, дабы въ случаѣ

случаѣ можно было взять для каждаго числа a надлежащiе буквы m и n .

910.

Между шѣмъ надлежитъ примѣчать, что при нѣкоторыхъ родахъ чиселъ знаменованiя чиселъ m и n вообще наименѣе можно; но сiе дѣлается при шѣхъ только чѣмъ ихъ, которыя единицею или двумя меньше, или больше квадратнаго числа, что особливаго дослѣдно показанiя.

911.

По сему пусть будетъ $a = ee - 2$, или двумя меньше квадратнаго числа, и должно быть $(ee - 2)nn + 1 = mm$; то явно есть, что m меньше нежели en , для того положи $m = en - p$. будетъ $(ee - 2)nn + 1 = een - 2enp + pp$, или $2nn = 2enp - pp + 1$ и отсюда $n = \frac{ep + \sqrt{(e^2pp - 2pp + 1)}}{2}$, гдѣ сразу видно что взявъ $p = 1$ коренной знакъ уничтожится и будетъ $n = e$, а $m = ee - 1$.

Когда бы было напримъ $a = 23$, гдѣ $e = 5$, то будетъ $23nn + 1 = mm$; ежели

Ц 4

$n = 5$

$n = 5$ и $m = 24$, то само чрезъ себя также явствуетъ, что положи въ $n = e$ т. е. когда $a = ee - 2$, выйдетъ $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$ квадратъ изъ $ee - 1$.

912.

Пусть будетъ $a = ee - 1$, т. е. единицею меньше квадратнаго числа и должно быть $(ee - 1)m + 1 = m^2$; то здѣсь опять m меньше нежели en , для того положи $m = en - p$, будетъ $(ee - 1)m + 1 = eep - 2ep + pp$, или $mp = 2ep - pp + 1$, отсюда $n = ep + \sqrt{(eer - pp + 1)}$ гдѣ коренной знакъ уничтожится, когда $p = 1$ и получится $n = 2e$, а $m = 2ee - 1$. Сие легко видѣть можно; ибо когда $a = ee - 1$ и $n = 2e$, то $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$ квадратъ изъ $2ee - 1$. Пусть на прим. $a = 24$ такъ что $e = 5$, найдется $n = 10$ и $24n + 1 = 2401 = 49^2$.

913.

Положимъ еще $a = ee + 1$, или 1 цѣю больше квадратнаго числа и должно быть $(ee + 1)m + 1 = m^2$, гдѣ m , какъ видно, больше нежели en , для того возми $m = ne + p$

$+p$, будетъ $(ee+1)np+1=eenn+2enp+pp$, или $np=2enp+pp-1$, откуда $n=er+1/(eer+pr-1)$, гдѣ $p=1$ взявъ должно и выдѣль $n=2e$, $m=2ee+1$. Сіе легко усмотрѣть можно иѳо когда $a=ee+1$ и $n=2e$, то $ann+1=4e^2+4ee+1$ квадратъ изъ $2ee+1$. Возми на прим. $a=17$ такъ иѳо $e=4$, будетъ $17m+1=m$, когда $n=8$ и $m=33$.

914.

Пусть будетъ наконецъ $a=ee+2$, для двумя больше квадратнаго числа и должно быть $(ee+2)np+1=m$. Завѣсь видно, что m больше нежели en , чего ради положи $m=er+p$, выдетъ $eenn+2np+1=eenn+2enp+pp$ или $2np=2enp+pp-1$, отсюда $n=\frac{er+1/(eer+pr-1)}{2}$; возми ипсерь $p=1$ будетъ $n=e$ и $m=ee+1$, шо заравъ видно, что ежели $a=ee+2$ и $n=e$, будетъ $ann+1=e^2+2ee+1$ квадратъ изъ $ee+1$. Положимъ на прим. $a=11$, такъ что $e=3$, по получився $11m+1=m$, когда $n=3$ и $m=10$; естли жебы похотѣли взявъ $a=83$, то было бы $e=9$. и найдется $83m+1=m$, когда возмется $n=9$ и $m=82$.

Ц 5

Таблица

Таблица чиселъ m и n , изчисленныхъ для всѣхъ величинъ числа a отъ 2 до 100, такъ что $mn = am + 1$

a	n	m	a	n	m
2	2	3	10	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	10	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

а	и	и	а	и	и
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	2
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	107
67	5957	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2481249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10



ГЛАВА VIII

О способѣ не извлекаемую формулу $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3}$, здѣлать рациональною.

915.

Мы приступаемъ теперь къ формулѣ, въ которой x до пренесенія снѣсены възышенъ, а потомъ пойдѣмъ далѣе къ четвертой, не смотря на то что сѣи ослучая подобнымъ образомъ разсматривать должно.

И такъ пусть сѣю формулу $a+bx+cx^2+dx^3$ квадратомъ здѣлать надлежитъ. На сѣи концы потребны надлежащѣ величины вмѣсто x въ рациональныхъ числахъ, и понеже въ сѣмъ большее уже затрудненіе бываетъ, то требуется также больше и искусства находить только ломанья числа вмѣсто x и ими приуждены довольствоваться, а не требовать рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ. Прже всего примѣчать здѣсь должно, что
никакого

никакого всеобщаго рѣшенія дать не лѣзя , какъ то прежде было ; но каждое дѣйствіе даетъ намъ знать одно только знаменованіе вмѣсто x , когда напротивъ того прежней способъ ведетъ вдругъ къ бесконечно многимъ рѣшеніямъ

916.

Когда въ прежепоказанной формулѣ $a+bx+cx^2$ было бесконечно много случаевъ, гдѣ рѣшенія совсемъ невозможны, то случается сіе гораздо чаще съ перешнею формулою. гдѣ ни объ одномъ рѣшеніи упоминаеть не лѣзя , ежели одного еще неизвѣстно или неугадано; того ради для сихъ только случаевъ даемъ мы правила въ состояніи, помощію которыхъ изъ одного извѣстнаго рѣшенія новое найдемъ можемъ , изъ котораго потомъ равнымъ образомъ другое новое найдется , и сіе дѣйствіе далѣе продолжаться можно.

Но между тѣмъ часто случается что хотя одно рѣшеніе и извѣстно , оно однакожъ

накожѣ изъ онаго о другомѣ заключаѣи не лѣзя, такѣ что въ семѣ случаѣ одно только рѣшеніе мѣсто имѣетѣ, которое обстоятельство особливо при мѣчаніи достойно. Ибо въ предѣидущемѣ случаѣ изъ одного рѣшенія безконечно много новыхѣ найти можно было.

917.

И такѣ когда сія формула $a+bx+cx^2+dx^3$ должна бытъ квадратѣ, то непремѣнно нужно одинѣ уже случай знати, въ которомѣ она квадратомѣ бываеѣ. Такой случай легко видѣти можно, ежели первой членѣ будеѣ квадратѣ, и формула изобразится такѣ: $ff+bx+cx^2+dx^3$, которая по видимому будеѣ квадратѣ, когда положишя $x=0$.

Для того взявѣ въпервыхѣ сію формулу рассмотримѣ какимѣ образомѣ изъ извѣснаго случая $x=0$ другое знаменованіе вмѣсто x найти можно. Сіе можемѣ мы совершитѣ двумя образами, изъ которыхѣ каждой особливо изъяснитѣ мы

мы зѣсь наѣрены , припомѣ не худо
будетѣ зѣлапѣ начало сѣ особенныхѣ
случасѣ.

918.

Пусть сѣю формулу $1+2x-xx+x^2$
надлежитѣ зѣлапѣ квадратомѣ. Поне-
же зѣсь первой членѣ 1 есть квадратѣ,
то возми корень сего квадрата такѣ ,
чтобѣ первые члены уничтожились ; и
для того положи квадратной корень
 $=1+x$, косто квадратѣ нашей фор-
мулѣ долженѣ быть равенѣ и полу-
чится $1+2x-xx+x^2=1+2x+xx$, гдѣ
переднѣ два члена уничтожаются и выхо-
дитѣ сѣ уравненѣ $xx=-xx+x^2$, или
 $x^2=2xx$; раздѣливѣ на xx получится
 $x=2$, почему формула наша будетѣ
 $1+4-4+8=9$.

Равнымѣ образомѣ когда сѣя формула
 $4+6x-5xx+3x^2$ должна быть квадратѣ,
то положи корень $=2+nx$, и опредѣли n
такѣ чтобѣ оба первые члена уничтожи-
лись. Понеже $4+6x-5xx+3x^2=4+4nx+$
 nx^2 , то должно бытъ $4n=6$, слѣдов. $n=\frac{3}{2}$,
ощѣ

откуда слѣдующее уравненіе выходитъ,
 $-5xx + 3x^3 = \frac{9}{4}xx$, или $3x^3 = \frac{29}{4}xx$; откуда
 $x = \frac{29}{12}$, которое знаменованіе дѣлаетъ
 формулу нашу квадратурою, косою ко-
 рень $= 2 + \frac{3}{4}x = \frac{11}{4}$.

919.

Другой способъ состоитъ въ томъ,
 чтобъ въ корнѣ были 3 члена, яко
 $f + gx + bxx$, кои бы такого были свой-
 ства, чтобъ въ уравненіи т₁ и передніе
 члены уничтожились.

Пусть дана наприм. слѣдующая фор-
 мула: $1 - 4x + bxx - 5x^3$; положивъ корень
 ся $= 1 - 2x + bxx$, должно быть $1 - 4x$
 $+ bxx - 5x^3 = 1 - 4x + 4x^2 - 4\frac{1}{2}x^3 + b\frac{1}{2}x^4$, гдѣ
 $+ bxx$
 первые два члена пропадаютъ, а чтобъ
 и третій уничтожился, то надлежитъ
 быть $b = 2b + 4$ и слѣдов $b = 1$; отсюда
 получаемъ мы $-5x^3 = -4x^2 + x^4$, раздѣ-
 ливъ на x^2 получился $-5 = 4 - x$ и x
 $= 1$.

920.

Сии два способа употреблять мож-
но когда первой членъ a есть квадратъ,
и имѣетъ свое основаніе на томъ, что
по первому способу дастъ два члена въ
корнѣ, какъ $f \pm px$, гдѣ f квадратной
корень перваго члена; а p берется такъ
чтобъ второй членъ уничтожился и слѣ-
дов. третей только и четвертой члены
нашей формулы т. е. $cx + dx^3$ сравни-
вать должно съ $prxx$, и тогда раздѣливъ
уравненіе на xx выдѣстъ новое знамено-
ваніе вмѣсто x , которое будетъ $\pm \frac{px}{a}$.
Во второмъ способѣ берутся три члена
корня и полагаются оной $= f \pm px + qxx$
т. е. когда $a = ff$, а p и q опредѣляются такъ,
чтобъ первые 3 члена уничтожились,
что дѣлается такимъ образомъ: когда
 $ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fp + 2fqxx + 2pqx^2 + qqx^3$
то должно $b = 2fp$, слѣдов. $p = \frac{b}{2f}$; а
 $c = 2fq + pp$, слѣдов. $q = \frac{c - pp}{2f}$, а осталь-
ное

Тамъ II.

Ч

ное

нос $dx^2 = 2prx^2 + qqx^2$ можетъ раздѣлиться на x^2 и найдется $x = \frac{d-2pq}{4q}$.

921.

Между тѣмъ часто случается, что хотя $b = ff$; однакожъ по симъ способамъ величины вмѣсто x опредѣлить нельзя, какъ изъ сей формулы $ff + dx^2$ явствуетъ, гдѣ втораго и третяго члена нѣтъ; ибо положи по первому способу корень $f + px$ такъ чтобы $ff + dx^2 = ff + 2fpx + prx^2$, то должно быть $0 = 2fp$ и $p = 0$, откуда получится $dx^2 = 0$, и $x = 0$, что не дастъ новаго знаменованія.

А ежели возмется корень по второму способу $f + px + qxx$ такъ чтобы $ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^2 + qqx^2 = ff + dx^2$, то выйдетъ $0 = 2fp$, $p = 0$ и $2fq + pr = 0$ слѣдов. $q = 0$, откуда $dx^2 = 0$ и пакы $x = 0$.

922.

Въ такихъ случаяхъ инаго дѣлать нѣчего, какъ только что смотрѣть.

не можно ли отгадать такой величины вмѣсто x , чтобы формула была квадратъ, а изъ нее уже потомъ можно найти по прежнему способу новую величину вмѣсто x ; что также учиниться можно, хотя первый членъ и не квадратъ.

Для показанія сего положимъ что формула $3 + x^2$ должна быть квадратъ, сѣ учинится ежели $x = 1$: и такъ положивъ $x = 1 + y$ получится сѣя формула $4 + 3y + 3yy + y^2$, въ которой первый членъ есть квадратъ; для того положи корень онаго по первому способу $2 + py$, будетъ $4 + 3y + 3yy + y^2 = 4 + 4py + ppyy$, гдѣ для уничтоженія втораго члена должно быть $3 = 4p$ слѣдов. $p = \frac{3}{4}$ и получится $3 + y = pp$, $-y = pp - 3 = \frac{9}{16} - \frac{4y}{16} = -\frac{y^2}{16}$ почему $x = -\frac{y^2}{16}$ новая величина вмѣсто x .

Положи еще по второму способу корень $= 2 + py + quy$ будетъ $4 + 3y + 3yy + y^2 = 4 + 4py + 4quy + 2pqy^2 + qqy^2$. гдѣ
 $+ ppyy$
 для уничтоженія втораго члена должно быть $3 = 4p$, или $p = \frac{3}{4}$, а чтобы третей членъ

членъ уничтожить, то $3 = 4q + pp$, слѣдов.
 $q = \frac{3 - pp}{4} = \frac{163}{64}$ и будетъ $1 = 2pq + qqy$, по-
 куда $y = \frac{1 - 2pq}{qq}$, или $y = \frac{353}{128}$; слѣдов. $x = \frac{1171}{128}$.

923.

Теперь покажемъ, когда уже одна
 величина сыскана, какимъ образомъ дру-
 гую новую находить должно. Сіе пред-
 ставимъ мы вообще въ сей формулѣ
 $a + bx + cxx + dx^3$, о которой уже извѣ-
 стно, что она будетъ квадратъ, ес-
 ли $x = f$, и что тогда будетъ $a + bf$
 $+ cff + df^3 = gg$, потомъ положи $x = f + y$,
 то получится сія новая формула,

$$+ bf + by$$

$$+ cff + 2cfy + cy^2$$

$$+ df^3 + 3dffy + 3dfyy + dy^3$$

$$gg + (b + 2cf + 3dff)y + (c + 3dfyy + dy^3),$$

въ которой формулѣ первой членъ есть
 квадратъ и слѣдов. оба прежніе способа
 употребить можно; чрезъ что новые
 величины вмѣсто y и слѣдовательно такъ-
 же вмѣсто x получатся, а именно $x = f + y$.

924

924.

Но иногда сіе совсемъ ничего не помагаеѣ , хотя величину вмѣсто x и опгадаѣ , какъ то въ ссей формулѣ дѣлаеѣ ся $1+x^2$, которая будеѣ квадратъ , ежели возмеѣся $x=2$, и такъ полагая $x=2+y$ выдеѣ ся формула $9+12y+6yy+y^2$, которая должна быть квадратъ , коего корень по первому способу пусть будеѣ $3+py$, то $9+12y+6yy+y^2=9+6py+ppyy$, гдѣ должно быть $12=6p$ и $p=2$; потомъ $6+y=pp=4$, слѣдов. $y=-2$ откуда $x=0$, изъ котораго знаменованія далѣе ничего найти не можно. Но ежели возмеѣ корень по второму способу $3+py+qyy$, будеѣ $9+12y+6yy+y^2=9+6py+\frac{6yy}{p}+2pqy+qqy^2$, гдѣ должно быть во первыхъ $12=6p$ и $p=2$, потомъ $6=6q+pp=6q+4$, слѣдов. $q=\frac{1}{2}$; отсюда получиѣся $1=2pq+qqy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y$, почему $y=-3$, слѣдов. $x=-1$, а $1+x^2=0$. откуда далѣе ничего заключиѣ не лзя ; ибо ежели бы положили $x=-1+z$, то вышла бы

Ч 3

сіа

сія формула $3x^2 - 3x + x^3$, гдѣ первой членъ совсемъ уничтожается и слѣдов. ни того ни другаго способу употребить не можно. И зѣ сего довольно явствуетъ, что сія формула $1 + x^3$ квадратомъ быть не можетъ, выключая сіи 3 случая:

I) $x=2$, II) $x=0$, III) $x=-1$, что также и изъ другихъ основаній доказать можно.

925.

Для упражненія рассмотримъ еще сію формулу $1 + 3x^2$, которая въ сихъ случаяхъ будетъ квадратъ I) $x=0$, II) $x=1$, III) $x=2$: и поглядимъ можно ли еще другіе такіе величины найти.

Понесже извѣстно, что $x=1$, то положи $x=1+y$ и получимъ $4 + 9y + 9y^2 + 3y^3$; изъ сего корень пусть будетъ $2 + py$, такъ что $4 + 9y + 9y^2 + 3y^3 = 4 + 4py + p^2y^2$, гдѣ $9=4p$, слѣдов. $p=\frac{9}{4}$, а остальные члены $9+3y = p^2 = \frac{81}{16}$ и $y = -\frac{21}{16}$; по чему $x = \frac{5}{16}$. $1+3x^2$ слѣдов. будетъ квадратъ, котораго корень $= -\frac{9}{16}$, или также $= +\frac{9}{16}$. Если бы еще далѣе положить $x = \frac{5}{16} + z$, то
можно

можно бы было найти оппудя другія новыя величины. А еспьли бы за благо разсудилось положить корень прежней формулы по второму способу $= 2 + py + qu$, такъ что бы $4 + 9y + 9u + 3y^2 = 4 + 4py + 4qu + 2pqy^2 + qu^2$, то должно бы бысть $9 = 4p$, слѣдов. $p = \frac{9}{4}$, потомъ $9 = 4q + 1p = 4q + \frac{9}{4}$, по чему $q = \frac{63}{64}$; а изъ остальныхъ членевъ будетъ $3 = 2pq + qu = \frac{567}{128} + qu$, или $576 + 128qu = 384$, или $128qu = -183$, или $126\frac{63}{64}u = -183$, или $42\frac{63}{64}u = -61$, будетъ $u = -\frac{1852}{1344}$, слѣдов. $x = -\frac{629}{1344}$, и по прежнему показанію другія новыя найдутся.

926.

Здѣсь изъ извѣстнаго случая $x = 1$ вывели уже мы двѣ новыя величины, изъ которыхъ, еспьли кто на себя трудъ принять похочетъ, другія новыя найти можно; но чрезъ то попадетъ онъ на весьма большіе дроби.

Сего ради имѣемъ мы причину удивляться, что изъ сего случая $x = 1$ не

Ч 4

можно

можно вывести другаго $x=2$, которой также легко виденъ, что безъ сомнѣнія есть знакомъ несовершенства найденнаго предъ симъ способа.

Также изъ случая $x=2$ можно найти другія новыя величины. На сей конецъ возми $x=2+y$, такъ что $25+36y+18yy+3y^2$ должно быть квадратъ, коего корень по первому способу, пусть будетъ $5+py$, то $25+36y+18yy+3y^2=25+10py+ppyy$ и найдется $36=10p$, или $p=\frac{18}{5}$.

Прочіе же члены раздѣливъ на yy , дадутъ $18+3y=pp=\frac{324}{25}$, слѣдов. $y=\frac{10}{25}$, и $x=\frac{1}{2}$; по чему $1+3x^2$ будетъ квадратъ, коего корень есть $5+py=-\frac{11}{10}$ или $+\frac{11}{10}$. По второму же способу положивъ корень $5+py+qyy$ будетъ $25+36y+18yy+3y^2=25+10py+\frac{10}{9}py^2+2pqy+qqy^2$, гдѣ для уничтоженія втораго и прѣжняго члена должно быть $36=10p$, или $p=\frac{18}{5}$; потомъ $18=10q+pp$ и $10q=18-\frac{324}{25}=\frac{126}{25}$, и $q=\frac{63}{125}$; остальные же члены раздѣливъ на y^2 дадутъ $3=2pq+qq$,
или

или $qqy = 3 - 2pq = -\frac{398}{1321}$, слѣдов. $y = -\frac{398}{1321}$,
а $x = -\frac{629}{1321}$.

927.

Сіе вычисленіе продолжительно и трудно въ нѣхъ случаяхъ, гдѣ по другимъ основаніямъ очень легко общее рѣшеніе дать можно; какъ въ сей формулѣ $1 - x - xx + x^3$, здѣсь можно взять вообще $x = m - 1$, а n означаетъ каждое произвольное число. Когда $n = 2$, будетъ $x = 3$, и наша формула $1 - 3 - 9 + 27 = 16$ ежели возмется $n = 3$, будетъ $x = 8$ и формула наша $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Но здѣсь совсемъ особенное обстоятельство бываетъ, отъ котораго сіе легкое рѣшеніе зависитъ, и которое легко усмотрѣть можно, ежели мы нашу формулу раздробимъ на множительней по увидимъ, что она на $1 - x$ раздѣлилась и частное будетъ $1 - xx$, которое еще состоитъ изъ сихъ множительней $(1 - x)(1 + x)$, такъ что наша формула получитъ сей видъ $1 - x - xx + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2(1 + x)$. Если она

45

дол-

должна быть квадратъ , то понеже квадратъ раздѣленной на квадратъ, въ частномъ дастъ квадратъ , $1+x$ должно быть квадратъ ; и обратно когда $1+x$ квадратъ , то будетъ такожде $(1-x)^2(1+x)$ квадратъ , для того положи только $1+x=m$, то получится сразу $x=m-1$. Если бы сего обстоятельство примѣчено не было , то трудно бы по вышепоказаннымъ способамъ найти шесть только знаменований вмѣсто x .

928.

При каждой формулѣ весьма изрядное дѣло , раздроблять ся на множителей , ежели только возможно. Какимъ образомъ сіе дѣлается , о томъ уже выше показано ; а именно, положи данную формулу $= 0$ и ищи корень сего уравненія; ибо тогда каждой корень наприм. $x=f$ дастъ множителя $f-x$, которое разысканіе тѣмъ легче дѣлать можно , когда ищутся здѣсь одни только раціональные корни , кои всѣ суть дѣлители чиселъ порознь взятыхъ.

929

929.

Сие обстоятельство находится при нашей формулѣ $a+bx+cx^2+dx^3$, когда первые два члена уничтожатся, такъ чю cx^2+dx^3 должно быть квадратъ; но раздѣливъ сію формулу на x , частному, т. е. $c+dx$ неопмѣнно подлежащъ быть паки квадратомъ; положи $c+dx = px$, и найдемся $x = \frac{p-c}{d}$, которое знаменованіе вдругъ безконечно многія и притомъ всѣ возможные рѣшенія въ себѣ содержитъ.

930.

Если при употребленіи втораго члена буквы p опредѣлять не похочешь, чюбы второй членъ уничтожился, по попадешь на другую неизвлекаемую формулу, которую должно будетъ зѣлать раціональною.

Пусть предложенная формула будетъ $ff+bx+cx^2+dx^3$; положи ся корень $= f+px$, и получится $ff+bx+cx^2+dx^3 = ff+2fpx+ppxx$, гдѣ первые члены уничтожатся, а остальные раздѣливъ на x , дающъ

даютъ $b+cx+dx^2=2fp+prx$, которое уравненіе есть квадратное, отсюда найдется x какъ слѣдуетъ: $dx^2=prx-cx-2fp-b$, слѣдов.

$$x = \frac{pr-c + \sqrt{(p^2-2cpr+8dfr+cc-4bd)}}{2d}$$

Теперь дѣло состоитъ, чтобъ найти вмѣсто p , такіе величины, при которыхъ бы формула $p^2-2cpr+8dfr+cc-4bd$ была квадратъ. Но понеже здѣсь четвертая степень числа p попадаетъ, то надлежитъ сей случай до слѣдующей главы.



ГЛАВА IX.

О способѣ неизвлекаемую формулу $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}$ здѣлать извлекаемою.

931.

Теперь пришли мы къ такой формулѣ, гдѣ неопредѣленное число x до четвертой степени возвышено, при чемъ должно намъ окончить разысканіе о квадратномъ

ратномъ коренномъ знакѣ : ибо столь далеко мы еще не дошли, чтобъ дѣлать квадратами такіе формулы, гдѣ вышіе степени числа x попадаются.

При сей формулѣ 3 случая входятъ въ разсужденіе, изъ коихъ первой бываетъ, когда первой членъ a квадратъ, другой ежели послѣдней членъ квадратъ; и на конецъ, когда первой и послѣдней вдругъ квадраты, которые 3 случая поровнь разсмотримъ мы здѣсь намѣрены.

932.

1 разрѣшеніе формулы $V(ff+bx+cx+dx^2+ex^3)$. Понеже здѣсь первой членъ квадратъ, то по первому способу можно положить корень $=f+px$ и p опредѣлить такъ, чтобъ оба первые члены уничтожились, а остальные бы на xx могли раздѣлиться; но однакожъ въ уравненіи было бы еще xx и слѣдов. при опредѣленіи числа x потребенъ бы былъ новой коренной знакъ: для того возьмемъ заразъ второй способъ и положимъ корень

корень $= f + px + qxx$, потомъ буквы p и q такъ надлежитъ опредѣлить, чтобъ три первыя члена вонъ вышли, а остальные бы на x^3 могли раздѣлиться; и тогда получится одно простое уравненіе, изъ котораго x безъ кореннаго знака опредѣлится.

933.

По сему возми корень $= f + px + qxx$, и должно быть $ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4 = ff + 2fpx + 2fqxx + 2prx^3 + qqx^4$, гдѣ $+ppxx$ первыя члены сами собою уничтожаются; для втораго положи $b = 2fp$, или $p = \frac{b}{2f}$, для третьяго члена должно быть $c = 2fq + pp$, или $q = \frac{c - pp}{2f}$, и по учиненіи сего остальные члены могутъ раздѣлиться на x^3 , и выдѣлѣнъ сие уравненіе $d + ex = 2pq + qqx$, откуда найдѣтся $x = \frac{d + 2pq}{qq - e}$.

934.

Но легко видѣть можно, что по сему способу ничего не найдѣтся, ежели

ли втораго и третяго члена въ формулѣ не будетъ, или когда $b=0$ и $c=0$; ибо тогда $p=0$ и $q=0$ слѣдов. $a=\frac{d}{c}$, но изъ сего обыкновенно ничего новаго найти не лзя, а особливо когда и $d=0$, то получится $x=0$, которое знаменованіе ни мало не вспомоцествуетъ; по чему сей способъ для такихъ формулъ, какова $ff+ex^2$ ни мало не служитъ. Сіе самое обстоятельство бываеиъ также, когда $b=0$ и $d=0$, или когда втораго и четвертаго члена нѣтъ; и формула имѣеиъ такой видъ $ff+cx^2+ex^4$, тогда будетъ $p=c$, а $q=\frac{c}{x}$. Откуда найдеиъся $x=0$, которое знаменованіе заразиъ видно и ни къ чему дальс насъ не ведеиъ.

935.

II разрѣшеніе формулы $V(a+bx+cx^2+dx^3+gex^4)$. Сію формулу можнобы топчасъ привести къ первому случаю полагая $x=\frac{y}{z}$; но понеже тогда сія формула $a+\frac{b}{z}+\frac{c}{z^2}+\frac{d}{z^3}+\frac{eg}{z^4}$ должна быиъ квадратиъ, то помноживъ на квадратъ z^4 надлежалобы оной вышши квадратомъ:

и получится $ay^2 + by^3 + cy^4 + dy + gg$, которая будучи написана наизворотъ, съ прежнею во всемъ сходствуетъ.

Но сѣ не нужно : корень можно положить и такъ $gx + px + q$, или наизворотъ $q + px + gx^2$. Будетъ $a + bx + cx^2 + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + 2gqx^2 + 2gpx^3 + ggx^4$.

Понеже здѣсь пятые члены сами чрезъ себя уничтожаются, то опредѣли сперва p такъ чтобъ и четвертые члены вонъ вышли ; что учинится когда $d = 2g$ или $p = \frac{d}{2g}$; потомъ опредѣлили еще q чтобъ и третіе члены уничтожились , что здѣлается полагая $c = 2gq + pp$, или $q = \frac{c - pp}{2g}$; по учиненіи же сего первыхъ два члена дають сѣ уравненіе $a + bx = qq + 2pqx$, откуда $x = \frac{a - qq}{2pq - b}$.

936.

Здѣсь ояшь попадается прежесеченной недостатокъ , когда втораго и четвертаго

четвертого члена hbx , или когда $b=0$ и $d=0$: ибо выдѣливъ тогда $p=0$, а $q=\frac{c}{2g}$ откуда $x=\frac{a-q}{g}$, кспорая величина есть безконечно большая и споль же мало служивъ какъ и $x=0$ въ первомъ случаѣ. И такъ сего способа при уравненіяхъ $a+cx+gx^2$ употреблять не можно,

937.

III Разрѣшеніе формулы $V(ff+bx+cx^2+dx^3+gex^4)$. Явно есмь, что въ сей формулѣ оба прѣжніе способа употребить можно; ибо первой членъ есть квадратъ, то положи корень $=f+px+qcx$, дабы первые 3 члена уничтожить; пономъ когда послѣдній членъ есть также квадратъ, то можно взять корень $=q+px+gxx$, чтобы исключивъ 3 послѣдніе члена, слѣдов. двѣ величины вмѣсто x найдутся.

Но можно сію формулу еще двумя другими способами разрѣшить, кои ей свойственны: по первому способу положи корень $=f+px+gxx$ и опредѣли p
 Тамъ II. III. такъ

такъ, чтобъ вторые члены уничтожились; понеже надлежитъ быть :

$$ff + bx + cxx + dx^3 + ggxx = ff + 2fpx + 2fgxx + 2gpx^2 + ggxx, \text{ то возми } b = 2fp, \text{ или } p = \frac{b}{2f}, \text{ и тогда не только первые два члена, но и послѣдніе уничтожаются; а остальные раздѣливъ на } xx \text{ даютъ сіе уравненіе } c + dx = 2fg + pp + 2gpx, \text{ откуда } x = \frac{c - 2fg - pp}{2gp - d}, \text{ или } x = \frac{pp + 2fg - c}{d - 2gp}.$$

Здѣсь особливо примѣчать надлежитъ, что въ формулѣ попадаетъ только квадратъ gg , коего корень g какъ отрицательный, такъ и положительной взять можно, по чему другая еще величина вмѣсто x получится: а именно

$$x = \frac{c + 2fg - pp}{-2gp - d}, \text{ или } = \frac{pp - 2fg - c}{2gp + d}.$$

938.

Есть еще другой путь къ разрѣшенію сѣя формулы: а именно положи корень какъ и прежде $f + px + gxx$, и опредѣли p такъ чтобъ четвертые члены уничто-

уничтожились, т. е. если положится въ прежнемъ уравненіи $d=2gp$, или $p=\frac{d}{2g}$, и понеже тогда первой членъ съ двумя послѣдними уничтожается, а остальные раздѣливъ на x даюшъ сіе простое уравненіе $b+cx=2fp+2fgx+ppx$, откуда $x=\frac{b-2fp}{2fg+pp-x}$. При чемъ надлежитъ примѣчать, что въ сей формулѣ находяшся только квадратъ ff , коего корень также и $-f$ взять можно, такъ что будетъ $x=\frac{b+2fp}{pp-2fg-x}$, по чему двѣ искомыя величины вмѣсто x найдутся, и слѣдовательно чрезъ показанные до сихъ мѣстъ способы всѣхъ навсе 6 новыхъ величинъ вывести можно.

939.

Но здѣсь паки скучное обстоятельство случается, когда втораго и четвертаго члена нѣтъ, или $b=0$ и $d=0$, то ни одной надлежащей величины вывести не можно, и слѣдов. сего

III 2

Фор-

формулы $ff + cxx + gga^4$ разрѣшивъ чрсѣъ то не лѣзя ; ибо когда $b = 0$ и $d = 0$ то изъ обѣихъ способовъ будетъ $p = 0$ и по сему изъ перваго $x = \frac{e}{g}$ равно безконечному ; а изъ другаго $x = 0$, изъ коихъ далѣе ни чсго найти не можно.

940.

Сія суть 3 формулы въ которыхъ показанные до сихъ поръ способы употреблять можно , но ежели въ предложенной формулѣ ни первой ни послѣдней членъ не квадраты , то ни чсго дѣлать, не лѣзя прежде нежели отгадана не будетъ такая вмѣсто x величина, при которой формула наша будетъ квадратъ.

Положимъ что формула наша будетъ квадратъ , когда положимся $x = b$, такъ что $a + bb + cbb + db^2 + eb^3 = kk$, то возми только $x = b + r$, и получимся новая формула , въ которой первой членъ kk квадратъ и такъ первой случай употребить можно. Сіе превращеніе употребляется такожде, когда уже въ предыдущихъ случаяхъ знаменованіе вмѣсто x ,

x , какъ на прим. $x = b$, найдено; ибо иногда надлежитъ только поставить $x = b + y$, то получится новое уравненіе, къ которому прежніе способы употребить можно; а изъ найденныхъ уже величинъ вмѣсто x другіе новые найдутся и съ сими новыми равнымъ образомъ поступать. и слѣдов. больше величинъ вмѣсто x находить можно.

941.

Особливо же примѣчать должно о часто напоминаемой формулѣ, гдѣ второго и четвертаго члена не достаетъ, что ни какого рѣшенія надѣяться нельзя, ежели одного, такъ сказать, не отгадано; а какъ въ такомъ случаѣ поступать, то покажетъ сія формула $a + ex^2$, которая весьма часто попадается.

И по сему положи что уже величину $x = b$ нашли такъ, что будетъ $a + eb^2 = kk$; а для нахождения другихъ возми $x = b + y$, то должна сія формула быть квадратъ $a + eb^2 + 4eb'y + 6eb^2y + 4eb'y^2 + ey^2$

III 3

+ey²

$+ey^4$, то есть $kk + 4eb^2y + 6ebbyy + 4eb^2y^2 + ey^4$, которая надлежитъ до перваго способа; чего ради положи квадратной ся корень $= k + py + qy^2$, и будетъ наша формула равна сему квадрату $kk + 2kpy + 2kqy^2 + p^2y^2 + q^2y^4$, гдѣ въ первыхъ p и q

такъ опредѣлить должно, чтобъ второй и третей членъ уничтожились; для того должно быть $4eb^2 = 2kp$, слѣдов.

$$p = \frac{2eb^2}{k}; \quad 6ebby = 2kq + p^2; \quad \text{отсюда } q = \frac{6ebby - p^2}{2k},$$

$$\text{или } q = \frac{3ebbykk - 2eb^4}{k^2}, \quad \text{или } q = \frac{ebb(3kk - 2eb^2)}{k^2},$$

$$\text{или понеже } eb^2 = kk - a, \quad \text{будетъ } q = \frac{ebb(kk + 2a)}{k^2},$$

Потомъ слѣдующіе члены раздѣливъ на y^4 дають $4eb + ey = 2pq + q^2y$, откуда

$$\text{найдется } y = \frac{4eb - 2pq}{q^2 - e}. \quad \text{Числитель сся}$$

дробн получитъ такую формулу

$$\frac{4ebk^2 - 4ebb^2(kk + 2a)}{k^4}, \quad \text{которая, понеже}$$

$$eb^2 = kk - a, \quad \text{превратится въ сию}$$

$$4ebk^2$$

$$\frac{4ebk^3 - 4eb(kk-a)(kk+2a)}{k^3}, \text{ или } \frac{4eb(-akk+2aa)}{k^3},$$

$$\text{или } \frac{4aeb(2a-kk)}{k^3}; \text{ а знаменатель } qq-e=$$

$$\frac{e(kk-a)(kk+2a)^2 - ekb}{k^3} = \frac{e(3ak^3 - 4a^3)}{k^3} =$$

$$\frac{ea(3k^3 - 4aa)}{k^3}; \text{ откуда искомая величина}$$

$$\text{будетъ } y = \frac{4aeb(2a-kk) \cdot k^3}{k^3 \cdot ea(3k^3 - 4aa)}, \text{ т. е.}$$

$$y = \frac{4bkk(2a-kk)}{3k^3 - 4aa}, \text{ слѣдов. } x = \frac{b(8akk - k^3 - 4aa)}{3k^3 - 4aa},$$

$$\text{или } x = \frac{b(k^3 - 8akk + 4aa)}{4aa - 3k^3}. \text{ Поставивъ сію}$$

величину вмѣсто x , формула наша $a+ex^3$,
будетъ квадратъ, коего корень $k+py$
 $+quy$ и которой въ сію формулу обра-

$$\text{тится } k + \frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^3 - 4aa}$$

$$+ \frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k^3 - 4aa)^2}; \text{ ибо изъ}$$

$$\text{прежняго } p = \frac{2eb^3}{k}, \quad q = \frac{ebb(kk+2a)}{k^3}$$

$$\text{и } y = \frac{4bkk(2a-kk)}{3k^3 - 4aa}.$$

942.

Побудемъ еще при формулѣ $a+ex^*$, и когда извѣстной случай есть $a+eb^*=kk$, то можемъ мы. сго взять въ два случая, потому что какъ $x=-b$, такъ $x=+b$; и для того можемъ мы сию формулу превра щить въ другую третьяго рода, въ которой первой и послѣдней членъ будутъ квадраты. Сіе учинится полагая

$x = \frac{b(1+y)}{1-y}$, которой пріемъ намъ много

вспомощесивуетъ. И такъ формула на-

ша будетъ $\frac{a'1-y^2+eb^*(1+y)^2}{(1-y)^2}$, или

$\frac{kk+4'kk-2a)y+6kkzy+4(kk-2a)y^2+kkuy^2}{(1-y)^2}$,

сего возми квадратной корень по

третьему случаю $\frac{k+py-kuy}{(1-y)^2}$, такъ что

числитель нашей формулы долженъ быть равенъ сему квадрату $kk+2kpy-2kkuy$

$-2kpy^2+kkuy^2$ и зѣлай, чтобъ въпорыс

лены уничтожились, что учинится по-

лагая $4kk-8a=2kp$, или $p=\frac{2kk-4a}{k}$,

остальные же члены раздѣливъ на yy , даюпъ $6kk + 4(kk - 2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, или $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$; но понеже $p = \frac{2kk - 4a}{k}$, и $pk = 2kk - 4a$, то $y(8kk - 16a) = \frac{-4k^3 - 16akk + 16aa}{kk}$; отку-
да $y = \frac{-k^3 - 4akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, а чтобъ найти отсюда x , то впервыхъ $x + y = \frac{k^3 - 8akk - 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, $x - y = \frac{2k^3 - 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, слѣдов.
 $\frac{x + y}{x - y} = \frac{k^3 - 8akk + 4aa}{2k^3 - 4aa}$; и такъ $x = \frac{k^3 - 8akk + 4aa}{3k^3 - 4aa}$. б. Сие тоже самое изъя-
вление, которое мы нашли предс.

943.

Для изъясненія сего примѣромъ, пусть будетъ дана сія формула $2x^2 - 1$, которая должна быть квадратъ. Здѣсь $a = 1$, $c = 2$ и извѣстной случай, въ которомъ сія формула будетъ квадратъ есть когда $x = 1$, слѣдов. $b = 1$ и $kk = 1$,

Ш 5

Ш С.

т е. $k=1$; отсюда получаемъ мы выражъ
 новую величину $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$; но
 понеже числа x четвертая степень вхо-
 дитъ, то можно положить $x = -13$
 по чему $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Когда же сей случай возьмемъ за из-
 вѣстной, то будетъ $h=13$, $k=239$,
 откуда по прежнему новая вѣсто x ве-
 личина получится, а именно $x =$

$$\frac{815730721 + 228488 + 4}{2447192159} \cdot 13 = \frac{815959213}{2447192159}$$

 13 слѣд. $x = \frac{10607469769}{2447192159}$

944-

Подобнымъ образомъ рассмотримъ
 всеобщую формулу $a + cxx + ex^4$ и воз-
 мемъ за извѣстной случай, въ кото-
 ромъ она формула квадратъ, $x=h$, такъ
 что $a + chh + eh^4 = kk$; а для нахождения
 другихъ возми $x=h+y$ и тогда формула
 наша получится такой видъ:

а

$$cbh + 2chy + cy^2$$

$$eh^2 + 4eh^2y + 6eh^2yy + 4ehy^2 + ey^3$$

$$kk + (2ch + 4eh^2)y + (c + 6ehh)yy + 4ehy^2 + ey^3$$

гдѣ первой членъ есть квадратъ, ксго корень положи $k + py + qyy$ такъ что наша формула равна сему квадрату $kk + 2kpy + 2kqyy + 2pqy^2 + qqy^2$; теперь

опредѣлили p и q такъ, чтобъ второй и четвертой членъ уничтожились, къ чему во первыхъ требуется, чтобъ $2ch + 4eh^2 = 2kp$, или $p = \frac{ch + 2eh^2}{k}$, а потомъ

$$c + 6ehh = 2kq + pp, \text{ или } q = \frac{c + 6ehh - pp}{2k}$$

слѣдующіе же члены раздѣливъ на y^2 даютъ сие уравненіе: $4eh + ey = 2pq + qqy$,

откуда $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$, напоследокъ $x = b$

$+y$, въ которомъ случаѣ квадратной корень нашей формулы будетъ $k + py + qyy$ и если ли сие возьмемъ за первоначальной извѣстной случай, то найдемъ изъ онаго пакъ новой, и такимъ образомъ продолжая можно сколько кшо пожелаемъ. 945.

945.

Для изъясненія сего пусть данная формула будетъ $1 - xx + x^2$, гдѣ $a = 1$, $c = -1$, $e = 1$, и извѣстной случай заразъ виденъ а именно, $x = 1$, такъ что $b = 1$ и $k = 1$; положи теперь $x = 1 + y$, а квадратной корень нашей формулы $1 + py + qu$, то будетъ сперва $p = 1$, а потомъ $q = 2$, откуда $y = 0$ и $x = 1$, которой уже случай извѣстенъ и слѣдов. новаго не найдено; но изъ другихъ основаній можно доказать, что сія формула квадратомъ не будетъ, кромѣ случаевъ $x = 0$ и $x = \pm 1$.

946.

Пусть будетъ еще сія формула дана $2 - 3xx + 2x^2$, гдѣ $a = 2$, $c = -3$ и $e = 2$. Извѣстной случай заразъ виденъ $x = 1$, и такъ пусть $b = 1$ будетъ $k = 1$; ежели же теперь положится $x = 1 + y$, а квадратной корень $1 + py + qu$, будетъ $p = 1$; $q = 4$ и получится $y = 0$, откуда пакъ ничего новаго не найдется.

Другей

Другой примеръ пусть будетъ сія формула $1 + 8xx + x^4$, гдѣ $a = 1$, $c = 8$ и $e = 1$; по маломъ разсмотрѣніи найдется случай $x = 2$, возьми $b = 2$ будетъ $k = 7$; положивъ $x = 2 + y$, а корень $= 7 + py + quu$, должно быть $p = 7$, $q = \frac{77}{44}$; отсюда $y = -\frac{5880}{8011}$ и $x = -\frac{58}{8011}$, гдѣ знакъ — опустить можно. Въ семъ примѣрѣ примѣчать надлежитъ, что когда послѣдней членъ самъ по себѣ квадратъ, то и въ новой формулѣ квадратомъ ознаменется, и корень можно также еще взять по прежнему третьему случаю.

По сему пусть будетъ, какъ и прежде $x = 2 + y$, то получимъ

г

$$32 + 32y + 8yy$$

$$16 + 32y + 24yy + 8y^3 + y^4$$

$49 + 64y + 32yy + 8y^3 + y^4$, что разными способами квадратомъ быть можетъ; ибо положи сперва корень $= 7 + py + uu$ шакъ, что наша формула равна будетъ сему квадрату $49 + 14py + 14yy + 2py^3 + y^4$;

теперь можно здѣлать, что послѣдніе члены

398 О НЕОПРЕДѢЛЕННОЙ

члены пропадутъ , ежели положимся $2r = 8$, или $r = 4$, а остальные раздѣливъ на y дадутъ $64 + 32y = 14r + 14y + rry = 56 + 30y$; откуда $y = -4$, а $x = -2$, или $+2$, которой есть извѣстной случай. Когда же r возьмется такъ , чтобы вторые члены уничтожились , то будетъ $14r = 64$ и $r = \frac{32}{7}$; а оставшіеся члены раздѣливъ на yy дадутъ $14 + rr + 2ry = 32 + 8y$, или $\frac{170}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$; отсюда $y = -\frac{73}{28}$, слѣдов. $x = -\frac{15}{14}$, или $+\frac{15}{14}$, которая величина дѣлаетъ формулу нашу квадратомъ , корню котораго есть $\frac{1441}{784}$. Но $-y$ есть также корень послѣдняго члена , то можно квадратной корень взять и такъ: $7 + ry - y$, или формула равна сему квадрату $49 + 14ry - 14yy + rryy - 2ry^2 + y^4$, для исключенія предпослѣдняго члена положи $8 = -2r$, или $r = -4$, а остальные члены раздѣливъ на y дадутъ $64 + 32y = 14r + 14y + rry = -56 + 2y$, откуда $y = -4$, какъ и прежде.

Если же вторые члены уничтожатся , то будетъ $64 = 14r$ и $r = \frac{32}{7}$ а остав-

оставшіеся раздѣливъ на yy дадутъ $32 + 8y = -14 + pp - 2py$, или $32 + 8y = \frac{32}{y} = -\frac{64}{y} y$, слѣдов. $y = -\frac{32}{16}$ и. $x = \frac{16}{16}$, то же что и прежде.

947.

Такимъ же образомъ поступать можно со всеобщей формулою $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, когда случай $x = b$ извѣстенъ, и она будеть квадратъ т. е. kk ; ибо тогда возьми $x = b + y$, и получишь формула въ столькихъ же членахъ, изъ коихъ первой kk ; положи теперь корень ся $k + py + qyy$ и опредѣли p и q такъ, чтобъ вторыя и третьи члены уничтожились, а остальные раздѣливъ на y^2 дадутъ простое уравненіе, откуда y и слѣдов. x опредѣлить можно.

Но здѣсь отмѣтаются только тѣ случаи, гдѣ новонайденное знаменованіе числа x съ извѣстнымъ $x = b$ одинаково; ибо тогда ничего новаго найти не лзя. Въ такихъ случаяхъ формула или сама по себѣ не возможна, или должно угадать

дать другой случай, гдѣ она будѣтъ
квадратъ

948.

Въ рѣшеніи квадратныхъ коренныхъ
знаковъ дошли мы до сего мѣста ;
только когда вышняя степень не
превышаетъ 4 той. Если же въ такой
формулѣ 5 тая, или еще большая сте-
пень случится, то употребляемыхъ по
се мѣсто пріемовъ не довольно дать ей
рѣшеніе, хотя бы уже одинъ случай и
былъ извѣстенъ; а что бы сіе показать
яснѣе, то рассмотримъ теперь форму-
лу $kk + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5$, гдѣ
первой членъ уже квадратъ, и когда бы
мы захотѣли положить корень какъ и
прежде $k + px + qxx$, а p и q опредѣлить
такъ, чтобы вторыя члены уничтожились,
то останутся еще 3, кои раздѣливъ на
 x^2 даюшъ квадратное уравненіе, почему
должнобы было опредѣлить x новымъ
кореннымъ знакомъ. Если же бы по-
ложили корень $k + px + qxx + rx^3$, то
былабы уже въ квадратѣ 6 тая степень
и при

и при буквы p , q и r надлежало бы такъ опредѣлить чѣмъ вторыя, третьи и четвертые члены уничтожились, то останутся еще 4 тая, 5 тая и 6 тая степень, которые раздѣливъ на x^4 опять ведутъ къ квадратному уравненію, и слѣдов. x безъ кореннаго знака опредѣлить не можно; чего ради принуждены мы оставить такіе формулы, кои квадратами быть должны и приступимъ къ кубическимъ кореннымъ знакамъ.



ГЛАВА X.

О способѣ формулу

$\sqrt[3]{(a + bx + cxx + dx^3)}$ въѣлать рациональною.

949.

Здѣсь пребудутся такіе величины вмѣсто x , чѣмъ формула $a + bx + cxx + dx^3$ была кубическое число; и слѣдовательно можно бы было изъ оной извлечь кубической корень. При семъ упомянуть надлежитъ, что сія формула 3 тую степень

Тамъ II. III пень

пень превышать не должна; потому что въ противномъ случаѣ рѣшить ее не лзя бы было. Когда же формула до второй только степени возводитъ и членъ бы dx уничтожился то бы рѣшеніе сіе не легче было; но ежели послѣдніе два члена уничтожатся, такъ чтобъ формулу $a + bx$ кубомъ дѣлать надлежало, то бы дѣло ни какой трудности не имѣло; ибо должно бы только положить $a + bx = p^2$, а оплуда заразъ найдется $x = \frac{p^2 - a}{b}$.

950.

Здѣсь опять прежде всего примѣчать надлежитъ, что ежели ни первой ни послѣдней членъ не кубы, то ни о какомъ рѣшеніи помышлять не лзя, когда случая не будетъ извѣстно, въ которомъ формула будетъ кубъ. Оной или самъ собою виденъ будетъ, или чрезъ пробу найдется,

Первое дѣлается, когда первой членъ кубъ и формула будетъ $f^2 + bx + cxx + dx^3$

$+dx^2$, гдѣ известной случай $x=0$; потомъ также ежели послѣдней членъ кубъ и формула такого состоянія $a+bx+cx^2+g^3x^3$. Изъ сихъ обоихъ случаевъ рождается третья, гдѣ какъ первой такъ и послѣдней членъ кубы, которые три случая теперь мы рассмотримъ.

951.

Пусть предложенная формула будетъ $f^3+bx+cx^2+dx^3$, которую кубомъ издѣлать надлежитъ.

Положи корень ея $f+px$, такъ чтобъ наша формула была равна сему кубу $f^3+3ffpx+3fprxx+p^3x^3$, гдѣ первые члены сами собою уничтожаются; определи p такъ чтобъ и вторые исключивъ, что учинится когда $b=3ffp$, или $p=\frac{b}{3ff}$; потомъ остальные члены раздѣливъ на xx дающъ сие уравненіе $c+dx=3fpr+p^3x$, откуда $x=\frac{c-3fpr}{p^3-d}$, когда же бы послѣдняго члена dx^3 не было, то можно

бы просто положить кубичной корень $=f$, и тогда бы нашлось $f^3 = f^3 + bx + cx$, или $b + cx = 0$, слѣдов. $x = -\frac{b}{c}$; но изъ сего далѣе ничего заключить не лзя.

952.

Предложенная формула пусть будетъ во вторыхъ имѣть такой видъ: $a + bx + cx^2 + g^3x^3$, коей кубичной корень возми $p + gx$, котораго кубъ $p^3 + 3gp^2x + 3g^2px^2 + g^3x^3$: понеже здѣсь послѣдніе члены уничтожаются, то опредѣли p такъ, чибъ и предпослѣдніе вонъ вышли, что здѣлается когда $c = 3gp^2$, или $p = \frac{c}{3g}$, а первые два дають сіе уравненіе: $a + bx = p^3 + 3gp^2x$, откуда $x = \frac{a - p^3}{3gp^2 - b}$. Еслибы перваго члена a не было, то можно бы кубичной корень просто взять $= gx$, и тогда бы $g^3x^3 = bx + cx^2 + g^3x^3$, или $0 = b + cx$, слѣдов. $x = -\frac{b}{c}$; но сіе ни къ чему далѣе не служитъ.

953.

Пусть наконецъ данная формула будетъ $f^2 + bx + cx^2 + g^2x^2$, въ которой какъ первой такъ и послѣдней членъ кубы, чего ради оную по своимъ предъидущимъ способамъ рѣшить можно, и слѣдовъ двѣ величины вмѣсто x найдутся.

Сверхъ сего можно также еще положить корень $f + gx$, такъ что наша формула равна кубу $f^3 + 3ffgx + 3fggx^2 + g^3x^3$, гдѣ первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на x даютъ сіе уравненіе: $b + cx = 3ffg + 3fggx$, отсюда $x = \frac{b - 3ffg}{3fg - c}$.

954.

Когда же данная формула не будетъ принадлежать ни до одного изъ сихъ 3 способовъ, то дѣлать больше нечего, какъ только отгадать величину, которая бы была кубъ, и если такая найдется на прим. $x = b$, такъ что $a + bb + cbb + db^2 = k^3$, то возми $x = b + y$, и наша формула получитъ такой видъ.

III 3

а

а

$$bb + by$$

$$cbb + 2chy + cyy$$

$$db^3 + 3dbby + 3dhyy + dy^3$$

$k^2 + (b + 2cb + 3dbb)y + (c + 3db)yy + dy^3$,
 которая надлежишь до перваго способа,
 и слѣдов. величину для y найши можно;
 а опшуда получится новое знаменованіе
 вмѣсто x , изъ котораго послѣ такимъ
 же образомъ еще и больше найши можно.

955.

Сей способъ намяренъ мы изъ-
 яснить нѣкоторыми примѣрами и воз-
 мемъ во первыхъ сию формулу $1 + x + xx$,
 которая должна быть кубъ, да припомъ
 и надлежишь до перваго способа; по чему
 можно бы заразъ положить кубичной ко-
 рень $= 1$, откуда найдется $x + xx = 0$
 т. е. $x(1 + x) = 0$, слѣдов. или $x = 0$, или
 $x = -1$, но изъ сего далѣе ни чего
 не слѣдуетъ. Сего ради возми кубичной
 корень $1 + px$, коего кубъ есть $1 + 3px$
 $+ 3p^2xx$

$+ 3prx + p^3x^3$, и положи $1 = 3p$, или $p = \frac{1}{3}$,
и оставшіеся члены раздѣливъ на xx да-
ютъ $1 = 3pr + p^3x$, или $x = \frac{1-3pr}{p^3}$, но $p = \frac{1}{3}$,

найдемъ $x = \frac{1 - \frac{3}{9}}{\frac{1}{27}} = \frac{\frac{6}{9}}{\frac{1}{27}} = 18$. И по сему фор-

мула наша $1 + 18 + 324 = 343$, изъ чего
кубичной корень $1 + px = 7$. Ежели бы
захотѣли положить еще $x = 18 + y$,
то получила бы наша формула такой
видъ; $343 + 37y + 12y^2 + p^3y^3$, откуда по пер-
вому правилу кубичной корень надлежало
бы положить $7 + py$, коего кубъ 343
 $+ 147py + 21p^2y^2 + p^3y^3$; положи $37 = 147p$,
или $p = \frac{37}{147}$, а остальные члены дадутъ
сѣ уравненіе; $1 = 21pr + p^3y$, слѣдов. $y =$
 $\frac{1 - 21pr}{p^3}$ т. е. $y = \frac{1 - 340.21.147}{37^3} = -\frac{1042520}{50653}$.

откуда еще новыя величины находить
можно.

956.

Пусть дана будетъ сія формула
 $2 + xx$, которая должна быть кубъ.
Здѣсь прежде всего надлежитъ опгадать

Щ 4

случай,

случай, въ которомъ сѣ дѣлается, какой
 есть $x=5$; и такъ положи $x=5+y$ и
 получимся $27+10y+y^3$; изъ сего пусть
 будетъ кубичной корень $3+py$, и слѣдов.
 самая формула равна сему кубу, $27+27$
 $py+9pry+pr^3y^3$, возьми $10=27p$, или
 $p=\frac{10}{27}$, и получимся $1=9pr+pr^3y$ от-
 куда $y=\frac{1-9pr}{p^3}$ т. е. $y=-\frac{29.9.27}{1000}$, или
 $y=-\frac{4617}{1000}$, а $x=\frac{383}{1000}$; по сему наша фор-
 мула $4+xx=\frac{214689}{1000000}$, откуда кубичной ко-
 рень $3+py=\frac{129}{1000}$.

957.

Разсмотримъ еще сѣ формулу $1+x^3$,
 можетъ ли она быть кубомъ свѣрхъ
 двухъ очевидныхъ случаевъ $x=0$ и $x=-1$.
 Хотя сѣ формула и надлежитъ допре-
 тьяго случая, однакожъ корень $1+x$
 намъ ни чего не помогаетъ, пошому
 что его кубъ $1+3x+3xx+x^3$ положивъ
 равнымъ нашей формулѣ даетъ $3x+3xx$
 $=0$, или $x(1+x)=0$, т. е. или $x=0$,
 или $x=-1$.

Естьли

Естьли же положимъ $x = -1 + y$, то получится сія формула $3y - 3yy + y^3$, которая должна быть кубъ, и надлежитъ до втораго случая. Положимъ кубичной корень $p + y$, коего кубъ $p^3 + 3pry + 3pyy + y^3$, возмемъ $-3 = 3p$, или $p = -1$, то остальные члены дадутъ $3y = p^3 + 3pry = -1 + 3y$, слѣдов. $y = \frac{1}{3}$ т. е. бесконечной, откуда слѣдовательно ни чего не найдется. Тщетной будетъ трудъ искать еще другія для x величины: ибо изъ другихъ основаній доказать можно, что формула $1 + x^3$ кромѣ упомянутыхъ случаевъ ни когда кубомъ не будетъ. Поныже показано, что сумма двухъ кубовъ какъ $1^3 + x^3$ никогда кубомъ быть не можетъ, по сему также не возможно когда $1 = 1$.

958.

Утверждаютъ также что $2 + x^3$ кубомъ быть не можетъ, исключая случай $x = -1$. Сія формула хотя и надлежитъ до втораго случая, но по показанному тамъ правилу вывести ничего не лзя,

Ц 5

потому

потому что средних членовъ недоста-
етъ. Ежели же положимъ $x = -1 + y$,
то получимся сія формула $1 + 3y - 3yy$
 $+ y^3$, которую по всѣмъ тремъ случа-
ямъ рѣшить можно. Взявъ по первому
корень $1 + y$, коего кубъ $1 + 3y + 3yy$
 $+ y^3$, будемъ $-3yy = 3yy$, или $y = 0$, что
только дѣлается когда $y = 0$. Положи
по второму случаю корень $-1 + y$, коего
кубъ $-1 + 3y - 3yy + y^3$, и будемъ $1 + 3y$
 $= -1 + 3y$ и $y = \frac{2}{3}$ безконечной. По тре-
тьему способу должно бы было взять ко-
рень $= 1 + y$, что уже прежде было.

959.

Пусть будетъ дана сія формула
 $3 + 3x^3$, которая должна бышь кубъ.
Сіе учинится только въ случаѣ $x = -1$,
но отсюда ничего заключить не лзя;
потомъ также въ случаѣ $x = 2$, для шо-
го положи $x = 2 + y$, и выдемъ сія фор-
мула $8 + 12y + 6yy + y^3$, или $27 + 36y$
 $+ 18yy + 3y^3$, которая надлежитъ до
перваго случая, и по сему возми корень
 $= 3$

$= 3 + ru$, коего кубъ $27 + 27ru + 9rru + r^3u^3$, положи $36 = 27r$; или $r = \frac{4}{3}$, а остальные члены раздѣливъ на u дадутъ $18 + 3u = 9r + r^3u = 16 + \frac{64}{27}u$ или, $\frac{1}{27}u = -2$, откуда $u = -\frac{54}{1}$ слѣдов. $x = -\frac{20}{17}$; по чему формула наша $3 + 3x^3 = -\frac{216}{4913}$; коей кубичной корень есть $3 + ru = \frac{21}{17}$; изъ сего знаменованія можно бы было еще болѣе найти, если бы только захотѣли.

960.

Разсмотримъ еще наконецъ формулу $4 + xx$, которая въ двухъ извѣстныхъ случаяхъ будетъ кубъ; а именно когда $x = 2$ и $x = 11$, взявъ сперва $x = 2 + u$, формула сія $8 + 4u + uu$ будетъ кубъ, коего корень пусть будетъ $2 + \frac{1}{3}u$, а кубъ $= 8 + 4u + \frac{2}{3}u + \frac{1}{27}u^3$, откуда $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}u$ слѣдов. $u = 9$, а $x = 11$, другой извѣстной случай. Положивъ потомъ $x = 11 + u$ получится $125 + 22u + uu =$ кубу изъ $5 + ru$ т. е. $125 + 75ru + 15rru + r^3u^3$; взявъ $r = \frac{22}{75}$ будетъ $1 = 15rr + r^3u$ или $r^3u = 1 - 15rr = -\frac{100}{495}$, откуда $u = -\frac{172616}{10545}$ слѣдов. $x = \frac{75497}{10545}$ По-

Понеже x какъ положительной такъ и отрицательной быть можетъ, то возми $x = \frac{2+2y}{1-y}$, формула наша будетъ $\frac{8+8yu}{(1-y)^3}$, которая должна быть кубъ помножь въ вверху и внизу на $1-y$, что съ значеніемъ былъ кубъ, и получится $\frac{8-8y+8yu-8y^3}{(1-y)^3}$, гдѣ числителя только $8-8y+8yu-8y^3$, или раздѣливъ на 8 т. е. $1-y+y^2-y^3$ кубомъ здѣлать должно которую формула до всѣхъ трехъ способовъ принадлежитъ. Положи по первому корень $= 1-\frac{1}{2}y$, коего кубъ $1-y+\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{8}y^3$. Будетъ $1-y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y$, или $27-27y=9-y$, откуда $y=\frac{8}{13}$, слѣдов. $1+y=\frac{21}{13}$ и $1-y=\frac{5}{13}$, слѣдов. $x=\frac{11}{5}$ какъ и прежде; по второму способу положивъ корень $\frac{1}{2}-y$ тоже самое найдется.

По третьему взявъ, корень $1-y$, коего кубъ $1-3y+3y^2-y^3$, получится $-1+y=-3+3y$, откуда $y=1$, слѣдов. $x=\frac{4}{3}$ безконечной, и такъ

по сему способу ничего новаго не найдется.

961.

Зная уже сіи два случая $x=2$ и $x=1$ можно положить $x = \frac{2+1y}{1+y}$, и когда $y=0$, будетъ $x=2$; но ежели y бесконечной, то $x=1$; и по сему пусть во первыхъ $x = \frac{2+1y}{1+y}$ будетъ наша формула $4 + \frac{4+44y+121y^2}{1+2y+y^2}$, или $\frac{8+52y+125y^2}{(1+y)^2}$; помножь въ верху и въ низу на $1+y$, чтобъ знаменатель былъ кубъ, а здѣлать бы только числителя, которой будетъ $8+60y+177y^2+125y^3$, кубомъ.

И такъ положивъ корень $=2+5y$, чрезъ что не только 2 первые члена, но и послѣдніе уничтожатся, и слѣдов. ничего не найдется.

Положи по второму способу корень $=p+5y$, коего кубъ $p^3+15p^2y+75py^2+125y^3$

$+125r^3$, и возми $177=75r$, или $r=\frac{59}{25}$,
будетъ $8+60r=r^3+151ru$, откуда $-\frac{29+1}{125}$
 $y=\frac{80370}{15525}$ и $y=\frac{80370}{307275}$, и отсюда можно бы
было найти x .

Естьли же бы положили корень по 3 ему
способу $2+\frac{1}{2}y$, то бы отсюда ничего
не вышло; но можно также положить

$x=\frac{2+11y}{1-y}$, и тогда будетъ наша форму-

ла $4+\frac{4+44y+121y^2}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125y^2}{(1-y)^2}$

кней числителя помноживъ на $1-y$ вы-
детъ. $8+28y+89yy-125y^2$.

Ежели теперь положимъ по первому спо-
собу корень $=2+\frac{1}{3}y$, коего кубъ $8+28$
 $y+\frac{9}{3}yy+\frac{143}{27}y^3$, то выдетъ $89-125y=\frac{9}{3}$
 $+\frac{143}{27}y$, или $\frac{2718}{27}y=\frac{160}{3}$ слѣдов. $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$, по-
чему $x=11$, что уже извѣстно.

Возми еще по третьему способу ко-
рень $2+\frac{1}{5}y$, коего кубъ $8+60y+150yy$
 $-125y^3$, откуда найдется $28+89y=-60$
 $+150y$ слѣдов. $y=\frac{11}{11}$, а отсюда $x=-\frac{1090}{27}$
по чему формула наша будетъ $\frac{1101016}{729}$,
кубъ числа $\frac{106}{9}$.

962.

Сии по сущь извѣстные способы, помощію каторыхъ формулу, или квадратомъ или кубомъ издѣлать можно, когда только во первомъ случаѣ вышшая степень не опредѣленнаго числа не превышаетъ второй, а въ послѣднемъ третьей степени.

Можно бы еще случай присоединить, когда предложенную формулу биквадратомъ издѣлать надлежитъ, въ которомъ вышшая степень второй не превышаетъ; такъ когда формула $a + bx + cx^2$ должна быть биквадратъ, то прежде всего надлежитъ оную издѣлать квадратомъ, а потомъ корень сего квадрата еще квадратомъ; о чемъ уже правила показаны.

Такъ когда наприм. $xx + 7$, должно быть биквадратъ, то издѣлай прежде сию формулу квадратомъ, что учиниши поло-

$$\text{живъ } x = \frac{7rp - qq}{2rq}, \text{ или } x = \frac{qq - 7rp}{2rq}, \text{ и}$$

формула наша равна сему квадрату

$$q^2$$

$$\frac{q^4 - 14q^2rp + 49r^4}{4rrqq} + 7 = \frac{q^4 - 14q^2rp + 49r^4}{4rrqq},$$

откуда корень $\frac{7rp + qq}{2rq}$, которой еще

квадратомъ вѣлать должно. На сей конецъ помножь вѣверху и вѣнизу на $2rq$, чтобъ знаменатель былъ квадратъ; а числитель $2rq(7rp + qq)$ долженъ быть также квадратъ, чего иначе учинить нельзя, какъ отгадывая только случай: сего ради можно взять $q = rz$. чтобъ сія формула $2r^2z(7r^2 + r^2z^2) = 2r^4z(7 + zz)$, и раздѣливъ на r^4 , т. е. $2z(7 + zz)$ была квадратъ; здѣсь извѣстной случай $z = 1$; и такъ положивъ $z = 1 + y$ получимъ $(2 + 2y)(8 + 2y + y^2) = 16 + 20y + 6yy + 2y^3$, откуда корень пусть будетъ $4 + \frac{5}{4}y$, котораго квадратъ $16 + 20y + \frac{25}{4}yy$ положивъ равнымъ формулѣ нашей получится $6 + 2y = \frac{25}{4}$, $y = \frac{5}{4}$ и $z = \frac{5}{4}$, но $z = \frac{q}{r}$ будетъ $q = 9$ и $r = 8$ по сему $x = \frac{367}{144}$, слѣдов. формула наша $7 + xx = \frac{27911}{20736}$, коей квадратной корень есть $\frac{529}{144}$, а сего еще квадратной корень есть $\frac{23}{12}$, котораго наша формула биквадратъ.

963.

Наконецъ въ сей главѣ упомянуть надлежитъ , что есть нѣкоторыя формулы , кои вообще кубомъ издѣлать можно; такъ когда $схх$ должно быть кубическое число, то положи его корень $= px$, будетъ $схх = p^3 x^3$, или $с = p^3 x$, слѣдов. $x = \frac{с}{p^3}$, возьми $\frac{1}{q}$ вмѣсто p , получится $x = сq^3$. Причина сему видна; потому что формула содержишь въ себѣ квадратъ , чего ради всѣ такіе формулы $a(b+cx)^2$, или $abb + 2abcx + acсхх$ весьма легко кубомъ издѣлать можно: ибо положивъ кубической ея корень $= \frac{b+cx}{q}$ будетъ $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^2}{q^2}$ и раздѣливъ на $(b+cx)^2$ получится $a = \frac{b+cx}{q^2}$, откуда $x = \frac{aq^2 - b}{с}$, гдѣ q по изволению брать можно.

Отсюда явствуетъ, сколь велика польза разбивать формулу на ея множителей , когда только сіе учинить можно

Томъ II. В О

о которой матеріи намѣрены мы говорить
пространнѣе въ слѣдующей главѣ.



ГЛАВА XI.

О разрѣшеніи на множители формулъ
 $axx + bxy + cy$.

964.

Здѣсь буквы x и y значатъ цѣлыя по чѣ-
ко числа : мы уже видѣли въ какихъ
случаяхъ дробями довольствоваться дол-
жно, и какимъ образомъ приводится во-
просъ въ цѣлыя числа. Когда наприм.
искомое число x будетъ дробь, то на-
длежитъ только взять $x = \frac{t}{u}$ и тогда
вмѣсто t и u всегда можно брать
цѣлыя числа ; и понеже сія дробь въ
самомъ меншемъ видѣ изъяслена быть
можетъ, то обѣ буквы t и u за такія
числа почесть можно, кои общаго дѣ-
лителя не имѣютъ.

Въ предложенной формулѣ z и y
значатъ цѣлыя только числа, и прежде
нежели

Нежели можемъ мы показать, какимъ образомъ оную квадратомъ, или кубомъ, или другою вышшею степенью издѣлать можно, надлежитъ напередъ разсмотрѣть какія знаменованія буквамъ x и y даны должно, чшобъ формула содержала въ себѣ два или больше множителей.

§65:

Здѣсь 3 случая входятъ въ разсужденіе: *першй* когда сія формула дѣйствительно на 2 раціональные множителя разрѣшится можетъ; что учинится, какъ уже мы и прежде видѣли, когда bb - дано будетъ квадратное число:

Другой случай когда оба сія множителя равны между собою, въ которомъ сама формула дѣйствительной квадратъ содержитъ.

Третьей случай когда формула не иначе какъ на ирраціональные множители раздроблена быть можетъ, хотя они или просто ирраціональные, или совсемъ не-

В 1

воз-

возможные будущѣ. Первое учинится , когда $bb - 4ac$ есть положительное число, но не квадратъ ; а послѣднее , ежели $bb - 4ac$ будетъ отрицательное : сѣи по сущь 3 случая , кои мы разсмотримъ имѣетъ.

966.

Ежели формула наша на два рациональные множителя разрѣшится , то можно ее представить такъ : $(fx + gy)(bx + ky)$, которая уже по своему свойству заключаетъ въ себѣ двухъ множителей. А когда за благо разсудится, чинобъ она большее число множителей въ себѣ заключала , то возми только $fx + gy = pq$ и $bx + ky = rs$, и тогда наша формула равна сему произведенію $pqrs$, слѣдов. 4 множителей въ себѣ содержишь , коихъ число по произволенью увеличить можно , а изъ сего получаемъ мы двоякое знаменованіе вмѣсто x , а именно:

$$x = \frac{pq - gy}{f} \text{ и } x = \frac{rs - ky}{b}, \text{ почему будетъ } bpq - bgy = frs - fky, \text{ слѣдов. } y = \frac{frs - bpq}{fk - bg}$$

■

и $x = \frac{kpq - grs}{fk - bg}$. Для изъясненія буквъ x и y , въ цѣлыхъ числахъ надлежитъ взять p, q, r и s такъ, чтобъ числитель дѣйствительно могъ раздѣлиться на знаменателя, что учинится ежели или p и r , или q и s на него раздѣлятся.

967.

Для изъясненія сего, пусть предложена будетъ формула $xx - yy$, состоящая изъ сихъ множителей $(x + y)(x - y)$, а ежели она еще больше множителей имѣть долженствуетъ, то положи $x + y = pq$; $x - y = rs$ и получимъ $x = \frac{pq + rs}{2}$, $y = \frac{pq - rs}{2}$; но что бы сіи числа были цѣлыя, то должны оба числа pq и rs быть вдругъ или четныя, или оба нечетныя.

Пусть наприм. $p = 7$, $q = 5$, $r = 3$ и $s = 1$, будетъ $pq = 35$ и $rs = 3$, слѣд. $x = 19$ и $y = 16$, откуда найдется $xx - yy = 105$, которое число дѣйствительно
в 3
состо-

состоитъ изъ множителей 7, 5, 3, 1, и такъ сей случаи не имѣетъ ни малѣйшаго затрудненія.

968.

Еще меньше трудности имѣетъ другой случай, гдѣ формула два равныхъ множителя въ себѣ заключаетъ, и по сему такъ предсавлена быть можетъ: $(fx + gy)^2$, которой квадратъ никакихъ другихъ множителей имѣть не можетъ, кромѣ тѣхъ, кои изъ его корни $fx + gy$ рождаются. И такъ положивъ $fx + gy = pqr$, будетъ формула наша $ppqqrr$, и слѣдов. столько множителей имѣть можетъ, сколько за благо разсудится.

Здѣсь изъ двухъ чиселъ x и y одно только опредѣляется, а другое оставаясь на наше произволѣ; и когда получится $x = \frac{pqr - gy}{f}$, гдѣ y легко можно взять такъ, что дробь уничтожится. Наилегчайшая сего роду формула есть xx , если возмемъ $x = pqr$, то квадратъ xx заключаетъ въ себѣ три
квад.

квадратные множители, а именно: pp , qq и rr .

969.

Гораздо больше имѣетъ трудности третей случай, гдѣ формула наша на 2 раціональныя множителя разрѣшиться не можетъ, и требуется къ сему особое искусство находить вмѣсто x и y такія знаменованія, изъ которыхъ бы формула 2, или болѣе множителей въ себѣ содержала. А что бы облегчить сіе разысканіе, но должно примѣчать, что наша формула легко перемѣняется моетъ въ другую, гдѣ средняго члена нѣтъ;

а именно надлежитъ только взять $d = \frac{a-by}{2a}$, и получится сія формула $\frac{ax - byx + byy}{4a}$

$$+ \frac{byx - byy}{2a} + cy = \frac{ax + (4ac - by)y}{4a};$$

опустимъ теперь средней членъ и рассмотримъ формулу $ax + cy$, гдѣ все дѣло въ томъ состоитъ, какія бы знаменованія буквамъ x и y даны должно, что бы сія формула множителей имѣла. Легко усмотрѣть можно, что сіе отъ

Р 4

свой-

свойства чиселъ a и c зависящѣ, и для того начнемъ съ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ сего рода формулъ,

970.

Пусть во первыхъ дана будетъ формула $xx+yy$, коючая въ себѣ содержитъ, кои сумму двухъ квадратовъ изъясняющѣ, и представимъ здѣсь самыя меньшія до 50.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50. между которыми находятся нѣкоторыя первыя числа, кои ни какихъ множителей не имѣютъ; по сему вопросъ будетъ яснѣе, какія знаменованія буквамъ x и y дать должно, чтобъ формула $xx+yy$ дѣлителей или множителей въ себѣ имѣла; да припомъ столько, сколько за благо разсудится. При чемъ прежде всего исключамъ мы тѣ случаи, гдѣ x и y общаго дѣлителя имѣютъ, попому что тогда $xx+yy$ на онаго дѣлителя и на квадратъ сего могло бы раздѣлиться; ибо когда наприм.

$$x=7p$$

$x = 7p$ и $y = 7q$, то сумма ихъ квадратовъ $= 49pp + 49qq = 49(pp + qq)$ можетъ на 49 раздѣляться; и такъ надлежитъ вопросъ до такихъ формулъ, гдѣ x и y общаго дѣлителя не имѣютъ, или между собою недѣлимы. Затрудненіе здѣсь заразъ попадаетъ; ибо хотя и видно что оба числа x и y нечетныя, однакожъ формула $xx + yy$ четное число будетъ и слѣд. на 2 дѣлимо; но если одно четное, а другое нечетное, то формула будетъ нечетъ: а имѣетъ ли она дѣлителей или нѣтъ, то не скоро узнать можно. Оба же числа x и y четныя быть не могутъ, потому что они не должны имѣть общаго дѣлителя.

971.

По сему пусть будутъ оба числа x и y между собою недѣлимыя, и хотя формула $xx + yy$ должна въ себѣ заключать 2 или больше множителей, однакожъ въ такомъ случаѣ прежній способъ имѣть мѣста не можетъ; потому что сія

в 5

формула

формула на 2 раціональные множителя разрѣшиться не можетъ. Но ирраціональные множители, на которые формула раздробляется, и изъвѣщаясь чрезъ произведение $(x + yV - 1)(x - yV - 1)$, могутъ намъ также показать вслугу; ибо когда формула $xx + yy$ дѣйствительно множителей имѣетъ, то сіи ирраціональные множители должны паки имѣть множителей. Когда же бы сіи множители дѣлителей далѣе не имѣли, то бы и произведение оныхъ также ни какихъ множителей не имѣло. Но когда сіи множители суть ирраціональные, да и совсемъ невозможные, то числа x и y равнымъ образомъ общаго дѣлителя имѣть не должны, и слѣдов. не могутъ они имѣть ни какихъ раціональныхъ множителей, а будутъ ирраціональными, или совсемъ невозможными.

972.

И такъ когда требуется, чтобъ формула $xx + yy$ состояла изъ двухъ раціональныхъ множителей, то оба ирраци-

раціональные множители раздоби пакъ на два множителя и положи во первыхъ $x+yV-1=(p+qV-1)(r+sV-1)$; а понеже $V-1$, какъ положительной такъ и отрицательной взять можно, то само собою будетъ $x-yV-1=(p-qV-1)(r-sV-1)$, и произведеіе опыуда дастъ нашу формулу, т. е. $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ такъ чиръ она два раціональные множителя имѣетъ, ш е. $pp+qq$ и $rr+ss$. Но здѣсь оспалось еще опредѣлить значеніе чиселъ x и y , которыя также раціональные быть должны.

Помноживъ неизвлкомыхъ множителей между собою выдепъ $x+yV-1=pr-qs+psV-1+qrV-1$ и $x-yV-1=pr-qs-qrV-1-psV-1$, сложивъ эти формулы, будетъ $x=pr-qs$; когда же вычтешь одну изъ другой, то получится $2yV-1=2psV-1+2qrV-1$, или $y=ps+qr$. По сему взявъ $x=pr-qs$ и $y=ps+qr$ формула наша $xx+yy$ заодноинно имѣтъ будетъ двухъ множителей и выдепъ $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$.

Но

Но ежели потребуется большее число множителей, то должно только взять p и q такъ чпобъ $pp + qq$ имѣло двухъ множителей, и тогда бы нашлось 3 множителя, коихъ число по произведению увеличить можно.

973.

Понеже здѣсь квадраты только чиселъ p, q, r и s входящъ, то можно сіи взять также и отрицательными: возми на прим. q отрицательное, будетъ $x = pr + qs$ и $y = ps - qr$, коихъ сумма квадратовъ та же самая, какъ и прежде. Отсюда усматриваемъ мы, чпо ежели число произведенію $(pp + qq)(rr + ss)$ равно, то оно двоякимъ образомъ на два квадрата раздроблено быть можетъ; ибо сперва найдено $x = pr - qs$ и $y = ps + qr$; а потомъ $x = pr + qs$ и $y = ps - qr$. Пусть на прим. $p = 2$, $q = 3$, $r = 2$ и $s = 1$, такъ что бы сіе произведеніе вышло 13. $5 = 65 - xx + yy$, то будетъ тогда или $x = 4$, а $y = 7$, или $x = 8$ а $y = 1$, и въ обо-

ихъ

ихъ случаяхъ $xx + yy = 65$. Когда много такихъ чиселъ помножишь между собою, то произведение еще больше развѣ будетъ извѣявлять сумму двухъ квадратныхъ чиселъ различными образами. Умножь наприм. $2^2 + 1^2 = 5$; $3^2 + 2^2 = 13$ и $4^2 + 1^2 = 17$ между собою, и выйдетъ 1105, которое число на два квадрата раздроблено будетъ слѣдующимъ образомъ:

$$I) 33^2 + 4^2; II) 32^2 + 9^2; III) 31^2 + 12^2; IV) 24^2 + 23^2.$$

974.

Между содержащимися въ формулѣ $xx + yy$ числами находятся такія, кои изъ двухъ или больше такихъ чиселъ по умноженію составлены, а потомъ и такіе кои такъ не составлены. Сии называть станемъ простыми числами, а дѣлѣ сложными: и такъ простые числа въ формулѣ $xx + yy$ будутъ слѣдующія: 1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, и проч. въ которомъ ряду двойкія числа попадаютъ, а именно: первыя числа, или такія кои дѣлится не имѣютъ какъ 2,

5,

5, 13, 17, 29, 37, 41; которыхъ всѣ кромѣ 2 такого состоянія, что опята отъ нихъ 1 гу, остатокъ на 4 раздѣлится; или они содержатся въ формулѣ $4n+1$. Потомъ попадаются квадратныя числа, яко 9, 49, коихъ корни 3 и 7 не находяшся. При чемъ примѣчать надлежитъ, что сии корни 3 и 7 въ формулѣ $4n-1$ содержатся: но очевидно, что ни одно число изъ сей формулы $4n-1$ не можетъ быть суммою двухъ квадратовъ: ибо когда сии числа нечетныя, то должно одному изъ обоихъ квадратовъ быть четному, а другому нечетному. Но мы видѣли, что всѣ четныя квадраты на 4 дѣлятся, а нечетныя въ формулѣ $4n+1$ содержащяся; и такъ ежели четной квадратъ съ нечетнымъ сложится, то сумма получитъ всегда формулу $4n+1$, а никогда $4n-1$. что же всѣ первыя числа формулы $4n+1$ суть суммы двухъ квадратовъ, то хотя и извѣстно, но доказать не столь легко можно,

975.

Послупимъ далѣе и рассмотримъ формулу $xx + 2yy$, дабы увидѣть, какія знаменованія x и y имѣть должны, чтобы найти ея множителей. Понеже сія формула въ мнимыхъ множителяхъ представляется такъ $(x + y\sqrt{-2})(x - y\sqrt{-2})$, то разумѣется, какъ и прежде, ежели формула наша имѣетъ множителей, то и сія мнимая формула должна имѣть своихъ. Для того положи во первыхъ $x + y\sqrt{-2} = (p + q\sqrt{-2})(r + s\sqrt{-2})$, то видно, что $x - y\sqrt{-2} = (p - q\sqrt{-2})(r - s\sqrt{-2})$; по чему наша формула будетъ $xx + 2yy = (pr + 2qq)(rr + ss)$, и слѣдовательно двухъ множителей имѣетъ, изъ коихъ припомъ каждой того же роду. Для учиненія сего надлежитъ опредѣлить надлежащія знаменованія вмѣсто x и y , что здѣлается слѣдующимъ образомъ: понеже $x + y\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$, а $x - y\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, то сумма дастъ $2x = 2pr - 4qs$, слѣдов. $x = pr - 2qs$, а разность $2y\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$

$+2rsV-2$, откуда $y=qr+ps$. И такъ когда наша формула $xx+2yy$ должна имѣть множителей, то оные бывающъ всегда такого свойства, что одинъ изъ нихъ $pp+2qq$; а другой $rr+2ss$, или они оба суть числа одного рода съ $xx+2yy$. Для сей причины можно x и y двоякимъ образомъ опредѣлить, пошому что q какъ положительное, такъ и отрицательное взять можно, и найдется $x=pr-2qs$ и $y=ps+qr$; а пошомъ $x=pr+2qs$ и $y=ps-qr$.

976.

Ся формула $xx+2yy$ заключаетъ въ себѣ всѣ тѣ числа, которыя изъ одинакого и удвоеннаго квадрата состоятъ, и кои мы здѣсь до 50 предлагаемъ:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 38, 41, 43, 44, 49, 50. и которыя какъ и прежде, на простыя и составныя раздѣлить можно; простыя, кои изъ предъидущихъ не составлены суть слѣдующія: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43,

ждаго изъ сихъ множителей въ двухъ множителяхъ равнаго свойства ; а именно: возьми $x + yV - c = (p + qV - c)(r + sV - c)$ и $x - yV - c = (p - qV - c)(r - sV - c)$ и будешь наша формула $xx + cyy = (pr + csq)(rr + css)$, откуда явствуетъ , что множители съ самою формулою будутъ наки того же роду ; а знаменованія чиселъ x и y получатся слѣдующимъ образомъ : $x = pr + csq$, или $x = pr - csq$; $y = qr + ps$, или $y = ps - qr$; и отсюда легко уже узнать можно, какимъ образомъ формула наша еще большее число множителей имѣть можетъ,

978.

Теперь не трудно раздробить и сію формулу $xx - cyy$ на множители ; потому что только $-c$ на мѣсто $+c$ сдѣлать должно ; между тѣмъ можно ихъ также найти непосредственно такимъ образомъ : когда наша формула равна сему произведенію $(x + yVc)(x - yVc)$, то возьми , какъ слѣдуетъ $x + yVc = (p + qVc)(r + sVc)$ и $x - yVc = (p - qVc)(r - sVc)$,
от-

всегда найдутся сѣи множители: $xx - суу = (pr - cqq)(rr - css)$, кои также сѣи нашою формулою одного роду; знаменованіе же чиселъ x и y можно опредѣлить двоякимъ образомъ:

$x = pr + cqs$, $y = qr + ps$; попомѣ $x = pr - cqs$ и $y = ps - qr$; но ежели пожелаешь извѣдать выдеи ли такимъ образомъ найденное произведение; то зѣлай пробу сѣи первыми знаменованіями и будетъ $x^2 = prrr + 2cqrps + ccqqss$, $yy = prss + 2pqrs + qqrr$, и $суу = crps + 2cprqs + cqqrr$; откуда получится $xx - суу = prrr - crps + ccqqss - cqqrr$, что сѣи найденнымъ произведеніемъ $(pr - cqq)(rr - css)$ согласуеи.

§79.

По сѣи мѣсто разсматривали мы одинъ только первой членъ: а теперъ помножимъ оной буквою a , и станемъ искать какихъ формула $ax + суу$ множителей имѣть можетъ.

Ы 2

Зѣсь

Здѣсь видно, что наша формула равна будетъ сему произведенію $(x\sqrt{a} + y\sqrt{-c})(x\sqrt{a} - y\sqrt{-c})$, которые оба множителя еще въ множителяхъ изъяснить должно; но при семъ бываетъ нѣкоторое затрудненіе: ибо ежели бы слѣдующему способу положили

$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c}) = pr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}$, и $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c}) = apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}$, то получили бы отсюда $2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs$, а $2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac}$, и слѣдовательно для x , такъ и для y нашлись бы ирраціональныя знаменованія, кои здѣсь имѣть мѣста не могутъ.

§80.

Сему затрудненію можно пособить слѣдующимъ образомъ, положивъ $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} + qr\sqrt{-c} + aps\sqrt{-c}$, $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} - qr\sqrt{-c} - c$

$-c - apr \sqrt{-c}$; откуда вмѣсто x и y слѣдующія рациональныя знаменованія найдутся : $x = pr - cqs$, $y = qr + apr$, потомъ получивъ формула наша слѣдующихъ множителей $axx + cy = (arp + eqq)(rr + acss)$, изъ которыхъ одинъ только такой же съ нашею формулою видъ имѣетъ , а другой совсемъ иной.

981.

Между тѣмъ однакожъ обѣ сіи формулы великое сходство имѣютъ: ибо всѣ числа содержащіяся въ первой будучи помножены на числа другой обращаются паки въ первую формулу. Мы уже видѣли, что 2 числа второй формулы $axx + cy$ кои съ числами первой $axx + cy$ согласуютъ; будучи же между собою помножены производятъ паки число второй формулы.

И такъ надлежитъ еще разыскать, когда два числа первой формулы $axx + cy$ между собою помножатся , по кѣ кошой формулѣ надлежитъ произведеніе. Чего ради помноживъ формулы перваго

Ы 3 рода

рода $(arr + cqq)(arr + css)$, легко усмотрѣть можно, что произведеніе предсказаннѣе можно такъ: $(arr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$; взявъ $arr + cqs = x$ и $ps - qr = y$ получимъ формулу $xx + acyy$, которая до послѣдняго рода надлежитъ. По сему два числа перваго рода $axx + cyy$ помноживъ между собою дають число втораго рода. Сіе вкратцѣ изъяснить можно такъ: числа перваго рода означать I; втораго II. слѣдов I, I. дають II; I. II дають I; II. II дають II; откуда такожде явствуетъ, когда много такихъ чиселъ одно надругое множить должно, какъ I I. I дають I; I. I. II дають II; I, II, II дають I; II. II. II. дають II.

982,

Для изъясненія сего пусть будетъ $a = 2$ и $c = 3$, откуда сіи два рода чиселъ рождаются; первой содержится въ формулѣ $2xx + 3yy$, а другой въ формулѣ $xx + 6yy$, числа же перваго рода до 50 суть слѣдующія.

I,

I. 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. До втораго рода принадлежащѣ сѣи ;

II. 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49. Помножимъ число перваго рода наприм. 35 на одно втораго рода наприм. 31, произведеніе будетъ 1085, которое число заподлинно въ формулѣ $2xx + 3yy$ содержится, или можно въѣсто y такое найти число, чтобъ $1085 - 3yy$ было удвоенной квадратъ, т. е. $2xx$; сѣе учинится, I) когда, $y = 3$: ибо тогда $x = 23$, попомъ также II) ежели $y = 11$, будетъ $x = 19$; III) когда $y = 13$, то $x = 17$, и наконецъ IV) ежели $y = 19$, будетъ $x = 1$. Сѣи оба рода чиселъ можно опять раздробить на простыя и составныя. Составныя суть шѣ, кои изъ двухъ, или больше, меньшихъ чиселъ одного, или другаго рода состоятъ. Такимъ образомъ перваго рода простыя числа будутъ слѣдующія :

2, 3, 5, 11, 29, а составныя сѣи 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50 и проч

Вшераго же рода простыя числа суть
 сіи 1, 7, 31; прочіежѣ всѣ сославныя,
 яко 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33,
 36, 40, 42, 49.

ГЛАВА XII.

О превращеніи формулы $axx+суу$ въ
 квадраты, или въ вышшія степени.

983.

Мы уже прежде видѣли, что чиселъ
 формулы $axx+суу$ иногда квадратами
 здѣлать не лзя; но какъ скоро сіе воз-
 можно будетъ, то помянутую формулу
 въ другую превратить можно, въ кото-
 рой $a=1$, какъ наприм. сія формула
 $2pp-qq$ будетъ квадратъ, и можно ея
 представить въ семъ видѣ: $(2p+q)^2-2$
 $(p+q)^2$; взявъ теперь $2p+q=x$ и $p+q=y$
 получится формула $xx-2yy$, гдѣ $a=1$
 и $c=-2$. Подобное превращеніе завсегда
 имѣетъ мѣсто, сколь часто такую
 формулу квадратомъ здѣлать можно, и
 по

по сему когда формулу $axx+cy$ квадратомъ, или другою вышшею чистною степенью здѣлать надлежитъ; то мы заподлинно положишь можемъ $a=1$; а прочіе случаи почтемъ за невозможныя.

984.

Пусть предложена будеть формула $xx+cy$, которую квадратомъ здѣлать должно. Понеже она состоитъ изъ сихъ множителей $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, то должны оныя быть или квадраты, или помноженные на одно число квадраты; ибо когда произведение двухъ чиселъ должно быть квадратъ на прим. pq , то требуется чпобъ или $p=rr$, а $q=ss$ т. е. чпобъ каждой множитель былъ квадратъ, или чпобъ $p=mr$, а $q=ms$, т. е. чпобъ множители были квадраты на одно число помноженные. Чего ради положи $x+y\sqrt{-c}=m(p+q\sqrt{-c})^2$, и будетъ само по себѣ $x-y\sqrt{-c}=m(p-q\sqrt{-c})^2$, откуда получаемъ $xx+cy=mtt(pp+ccq)^2$ и слѣд. квадратное число. А для опредѣленія

Ы 5 буквъ

буквъ x и y имѣемъ мы сіи уравненія:
 $x + y\sqrt{-c} = tpr + 2trq\sqrt{-c} - tcqq$ и $x - y\sqrt{-c} = tpr - 2trq\sqrt{-c} - tcqq$, гдѣ какъ видно x равенъ будетъ рациональной части, а $y\sqrt{-c}$ иррациональной, т. е. $x = tpr - tcqq$ и $y\sqrt{-c} = 2trq\sqrt{-c}$, или $y = 2trq$.

И по сему положивъ $x = tpr - tcqq$, а $y = 2trq$, формула наша $xx + cyu$ будетъ квадратъ; а именно $tt(pp + cqq)^2$, корень естъ $tpr + tcqq$.

985.

Когда два числа x и y одно на другое недѣлимо, или общаго дѣлителя не имѣютъ, то надлежитъ положить $t = 1$, какъ ежели $xx + cyu$ должно быть квадратъ, то возьми только $x = pr - cqq$ а $y = 2rq$, и тогда сія формула равна будетъ квадрату $pp + cqq$. Вмѣсто того, чтобъ брать $x = pr - cqq$, можно также положить $x = cqq - pr$, потому что въ обоихъ случаяхъ квадратъ xx одинаковъ. Сіи суть тѣ же самыя формулы,

кои мы совсемъ изъ другихъ нашли
основаній , чѣмъ исправность сего спо-
соба подтверждается. Ибо по прежнему
способу , когда $xx + суу$ долженствуемъ
быть квадратъ, положи корень $= x + \frac{ру}{q}$

и получится $xx + суу = xx + \frac{2рху}{q} + \frac{rру}{qq}$.

гдѣ xx уничтожается , а остальные чле-
ны раздѣливъ на $у$ и помноживъ на qq
даютъ $сqqу = 2рqx + rру$, или $сqqу - rру$
 $= 2рqx$, раздѣливъ теперь на $2rq$ и на $у$

будетъ $\frac{x}{1} = \frac{сqq - rp}{2rq}$. Понеже x и $у$ дол-
жны быть недѣлимыя числа такъ какъ $р$
и q по должны x числителю , а $у$ зна-
менателю быть равенъ , слѣдов. $x = сqq$
 $- rp$ а $у = 2rq$ какъ и прежде.

986.

Сие рѣшеніе тоже самое будетъ
хотя бы число c было положительное
или отрицательное; но ежели оно само
имѣетъ множителей такъ какъ предло-
женная

женная формула $xx + asu$, которая должна быть квадратъ; но прѣжнее рѣшеніе не только имѣетъ мѣсто, гдѣ $x = acq - pr$ а $y = 2rq$, но еще и сіе $x = cqq - ar$ и $y = 2rq$: ибо тогда равнымъ образомъ будетъ $xx + asu = cqq + 2acr + ar^2 = (cq + ar)^2$, что также учинится, когда возмемъ $x = ar - cqq$, потому что квадратъ x выйдетъ одинакъ.

Сіе новое рѣшеніе по употребляемому здѣсь способу найдется такимъ образомъ. Положимъ $x + yV - ac = (pVa + qV - c)^2$ а $x - yV - ac = (pVa - qV - c)^2$, чтобъ вышло $xx + asu = (ar + cqq)^2$ и слѣдовъ квадратъ; но тогда будетъ $x + yV - ac = ar + 2rqV - ac - cqq$ и $x - yV - ac = ar - 2rqV - ac - cqq$, откуда слѣдуетъ $x = ar - cqq$ и $y = 2rq$. И такъ когда число ac различными способами на 2 множителя раздѣлиться можетъ, то и многія рѣшенія дать можно.

987.

Мы намерены сіе изъяснить нѣкоторыми опредѣленными формулами, и I. когда формула $xx + u$ должна

быть квадратъ гдѣ $ac=1$, то взявъ $x=pr-qq$ и $y=2pq$ будетъ $xx+yy=(pr+qq)^2$. II. ежели формула $xx-yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=-1$, то возьми $x=pr+qq$, а $y=2pq$ и получится $xx-yy=(pr-qq)^2$; III. когда сѣя формула $xx+2yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=2$, то положивъ $x=pr-2qq$, или $x=2pr-qq$, а $y=2pq$ будетъ $xx+2yy=(pr+2qq)^2$ или $(2pr+qq)^2$.

IV. Ежели формула $xx-2yy$ квадратомъ быть долженствуетъ, гдѣ $ac=-2$, то возьми $x=pr+2qq$, а $y=2pq$ и получится $xx-2yy=(pr-2qq)^2$. V. Ежели формула $xx+6yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=6$, и слѣдов. или $a=1$, а $c=6$ или $a=2$, а $c=3$, то можно положить сперва $x=pr-6qq$, а $y=2pq$ и тогда $xx+6yy=(pr+6qq)^2$. Потомъ можно также взять $x=2pr-3qq$, а $y=2pq$ и тогда $xx+6yy=(2pr+3qq)^2$.

988.

Но ежели бы формулу $axx+cyu$ квадратомъ зѣлать надсжало, то уже
выше

выше объявлено, что сему учиниться нельзя, ежели нѣтъ случая напередъ известнаго, въ которомъ сія формула действительно квадратомъ быть можетъ. И по сему известной случай пусть будетъ; когда $x=f$, а $y=g$; такъ что $aff+egg=bb$, и тогда формулу нашу въ другую сего рода $u+аси$ обратить можно,

положивъ $t=\frac{afx+egy}{b}$, а $u=\frac{gx-fy}{b}$,

будетъ $u=\frac{aaffxx+2acfgxy+ccggyy}{bb}$ и $и$

$=\frac{ggxx-2fgxy+ffyy}{bb}$, откуда слѣдуетъ

$u+аси=\frac{aaffxx+ccggyy+acggxx+acffyy}{bb}$

$=\frac{axx'aff+egg)+cyy(aff+egg)}{bb}$; но $aff+egg$

$=bb$, то $u+аси=ахх+суу$; и такимъ образомъ предложенная формула $ахх+суу$ переименится въ сію $u+аси$, которая по данному здѣсь правилу легко квадратомъ здѣлана быть можетъ.

989.

Поступимъ теперь далѣе и рассмотримъ какимъ бы образомъ формулу $axx + cyu$, гдѣ x и y между собою недѣлимы, кубомъ здѣлать можно было; къ чему прежнія правила недостижочны, но показанные здѣсь способы съ наилучшимъ успѣхомъ употребить можно. Причѣмъ сіе особливо примѣчання достойно, что сію формулу завсегда кубомъ здѣлать можно, какого бы свойства числа a и c ни были, чего при квадратахъ не бывало, ежели ни одного случая напередъ не было извѣстнаго: что такъ о всѣхъ четныхъ степеняхъ разумѣется; а въ нечетныхъ яко въ 3 еи, 5 тои, 7 мой рѣшеніе за всегда возможно.

990.

И такъ когда формулу $axx + cyu$ кубомъ здѣлать надлежитъ, то положи подобнымъ образомъ, какъ и прежде, $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$, а $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$: тогда выдѣль изъ того про-

произведеіе $axx + cyu = (arp + cqq)^2$, слѣдов.
 наша формула кубъ. Все дѣло въ томъ
 только состояишь, можно ли здѣсь x и y
 опредѣлить раціональными, что учинится
 когда положенные кубы дѣйствительно
 взяты будутъ, и тогда получимъ мы сіи
 два уравненія $xVa + yV - c = ar^3Va + 3arrrqV - c$
 $- 3srqqVa - cq^3V - c$, и $xVa - yV - c = ar^3Va$
 $- 3arrrqV - c - 3srqqVa + cq^3V - c$; откуда
 очевидно слѣдуетъ, что $x = ar^3 - 3srqq$, а
 $y = 3arrrq - cq^3$.

Сыскать наприм. два квадрата xx и
 yy , коихъ бы сумма $xx + yy$ составила
 кубъ: понеже здѣсь $a = 1$ и $c = 1$, то по-
 лучимъ мы $x = r^3 - 3rqq$ и $y = 3rrq - q^3$ и
 будетъ $xx + yy = (rr + qq)^3$. Пусть бу-
 детъ $r = 2$ и $q = 1$ найдемся $x = 2$ а $y = 11$;
 отсюда $xx + yy = 125 = 5^3$.

991.

Разсмотримъ сію формулу $xx + 3yy$,
 которую кубомъ здѣлать должно. По-
 неже здѣсь $a = 1$, $c = 3$, будетъ $x = r^3$
 $- 9rqq$

Употребляемые здѣсь способы тѣмъ
 наипаче достопамятнѣе, что помощью
 ирраціональных, или еще и мнимыхъ
 формулъ такія рѣшенія сысканы, къ
 числу одни только раціональныя, да еще
 и цѣлыя ипробовались числа. Но гораздо
 достопамятнѣе, что въ тѣхъ случаяхъ,
 гдѣ неизвлекаемость уничтожается, спо-
 собъ нашъ больше не годится; ибо когда
 наприм. $x^2 + y^2$ должно быть кубическое
 число, то заподлинно заключить можно,
 что и оба неизвлекаемые множители опи-
 шуда $x + y\sqrt{-c}$ и $x - y\sqrt{-c}$ кубы быть дол-
 женствуютъ; потому что оныя между
 собою недѣлимы; ибо числа x и y об-
 щаго дѣлителя не имѣютъ. Но еслили
 бы неизвлекаемость $\sqrt{-c}$ уничтожилась,
 какъ наприм $c = -1$, то бы основаніе
 се болѣе мѣста не имѣло; потому что
 тогда бы оба множителя $x + y$ и $x - y$
 имѣли общихъ дѣлителей, не смотря
 на то, что x и y оныхъ имѣть не бу-
 дутъ; а именно когда они оба нечет-
 ные числа.

И такъ ежели $xx-yu$ должно быть кубическое число, то не нужно, чтобъ какъ $x+y$, такъ и $x-y$ само по себѣ было кубомъ; но можно положить $x+y=2p^3$, а $x-y=4q^3$, и тогда $xx-yu$ безспорно было бы кубомъ, а именно $8p^3q^3$, коего корень кубической есть $2pq$, и слѣд. будетъ $x=p^3+2q^3$ и $y=p^3-2q^3$. Но ежели формула $axx+cy$ на 2 рациональные множителя раздробивъ не можеть, то и никакія другія рѣшенія имѣть мѣста не могутъ, кромѣ шѣхъ, кои здѣсь предложены.

994.

Сіе разсужденіе намѣрены мы изъяснить нѣкоторыми достопамятными вопросами,

Вопросъ. Требуется въ цѣлыхъ числахъ квадратъ xx , къ которому когда придастся 4, то бы вышелъ кубъ. Оныя суть 4 и 121, но не можно ли еще больше такихъ найти, о томъ здѣсь спрашивается?

Ъ а

Понедѣ

Понеже 4 есть квадратное число, то ищи сперва случай, гдѣ $xx+yy$ будетъ кубъ, что какъ изъ прежняго явствуетъ, здѣлается, когда $x=r^3-3rq$ и $y=3rrq-q^3$, но здѣсь $yy=4$, т. е. $y=\pm 2$, слѣдов. должно быть $3rrq-q^3=\pm 2$, или $3rrq-q^3=-2$. Въ первомъ случаѣ будетъ $q(3rr-q^2)=2$, слѣдов. q дѣлитель 2 къ, и по сему пусть будетъ сперва $q=1$, и получится $3rr-1=2$, слѣдов. $r=1$; по сему $x=2$, а $xx=4$.

Возьми $q=2$, будетъ $6rr-8=\pm 2$ взявъ знакъ $+$ найдется $6rr=10$ и $rr=\frac{5}{3}$, по сему знаменованіе r было бы неизвлечкомое и здѣсь бы не годилось. Взявъ знакъ $-$ будетъ $6rr=6$ и $r=1$, слѣдов. $x=1$ и больше случаевъ не бывають. Почему два только квадрата даны быть могутъ, а именно 4 и 121, къ которымъ когда придастся 4, то произойдутъ кубы.

995.

Вопросъ. Найти такіе квадраты въ цѣлыхъ числахъ, къ которымъ когда придастся 2, то произойдутъ кубы, какъ

какъ по сѣ квадратомъ 25 дѣлается ; спрашивается , неможно ли еще больше такихъ найти ?

Когда $xx+2$ должно быть кубическое число , а 2 есть удвоенной квадратъ , то ищи сперва случай , въ которомъ формула $xx+2yy$ будетъ кубъ , что изъ прежней 991 слѣдуетъ дѣлается , гдѣ $a=1$, и $c=2$, $x=p^2-6rqq$ и $y=3rrq-2q^2$; но здѣсь $y=+1$, то должно быть $3rrq-2q^2=q(3rr-2qq)=+1$, и слѣдоват. q есть дѣлитель 1 цы ; по сему пусть $q=1$, будетъ $3rr-2=+1$, взявъ верхнй знакъ получится $3rr=3$ и $r=1$, слѣдоват. $x=5$, а исподней знакъ даетъ для r неизвлекомое знаменованіе , которое здѣсь не годится ; откуда слѣдуетъ , что только одинъ квадратъ 25 въ цѣлыхъ числахъ желаемое свойство имѣетъ.

996.

Вопросъ. Сыскать такіе квадраты , кои будучи помножены на 5 и сложены съ 7 дѣлаютъ кубъ , или $5xx+7$ будетъ кубъ ?

В 3

Ищи

Ищи сперва тѣ случаи , когда $5xx + 7yy$ будетъ кубъ , что по 991 спазъбъ учинится , гдѣ $a=5$, $c=7x=5p^2-21pqq$ и $y=15ppq-7q^2$; понеже здѣсь $y=\pm 1$, то $15ppq-7q^2=q(15pp-7qq)=\pm 1$ и q должно быть дѣлителемъ 1 цы , слѣдовательно 1. По сему $15pp-7=\pm 1$; но оба случаи даютъ вмѣстѣ p нѣчно неизвлекаемое , однакожъ изъ сего заключить не лзя , чтобъ вопросъ былъ совсемъ невозможной , потому что p и q дроби быть могутъ , когда $y=\pm 1$, а x цѣлое число. Сіе дѣйствительно бываетъ , когда $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, то будетъ $y=\pm 1$, $x=2$; но съ другими дробями дѣйствіе сіе невозможно.

997.

Вопросъ. Требуются такіе квадраты въ цѣлыхъ числахъ , кои взявъ вдвое и отнявъ изъ нихъ 5 дадутъ кубъ , или $2xx-5$ должно быть кубъ ? Ищи сперва такіе случаи , въ которыхъ $2xx-5y$ будетъ кубъ , что здѣлается по 991 спазъбъ , гдѣ $a=2$ и $c=-5$, когда $x=$
 $2p^2$

$2p^3 + 15pqq$ и $y = 6pq + 5q^3$, но здѣсь должно было $y = -1$ слѣдовательно $6pq + 5q^3 = q(6p + 5q^2) = -1$, чему въ цѣлыхъ числахъ быть не лзя, да и въ дробяхъ такожде, для того сей случай весьма доскучнѣ примѣчанія, въ которомъ логическое рѣшеніе и имѣетъ мѣсто, а именно: ежели $x = 4$, ибо тогда будетъ $2xx - 5 = 27$ кубъ 3 лъ и немалой силой въ важности сыскать сему причину.

998.

Возможное дѣло, что $2xx - 5yy$ будетъ кубъ. коего корень имѣетъ такую формулу $2p - 5qq$ т. е. когда $x = 4$, $y = 1$, $p = 2$, $q = 1$ и еще имѣетъ случай, въ которомъ $2xx - 5yy = (2p - 5qq)^3$, не смотря на то, что оба множители изъ $2xx - 5yy$ т. е. $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ и $x\sqrt{2} - y\sqrt{5}$ не кубы. Однакожъ они по сему способу кубы изъ $p\sqrt{2} + q\sqrt{5}$ и $p\sqrt{2} - q\sqrt{5}$ быть должны; ибо въ нашемъ случаѣ $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$; напрошивъ того $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^3 = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}$, что совсемъ

в 4 сб

сб $4\sqrt{2} + \sqrt{5}$ не согласуетъ. Но надлежитъ примѣчать, что Формула $rr - 1ss$ въ безконечно многихъ случаяхъ 1, или -1 быть можетъ; а именно когда $r=3$ и $s=1$; попомъ когда $r=19$ и $s=6$, кои на формулу $2rr - 5qq$ помноживъ, дають пакъ число послѣдней формулы.

И по сему пусть будетъ $ff - 10gg = 1$. и вмѣсто прежняго $2xx - 5yy = (2rr - 5qq)$ положимъ вообще $2xx - 5yy = (ff - 10gg)(2rr - 5qq)^2$; взявъ множителей будетъ $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = (f + g\sqrt{10})(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^2$; но сѣ какъ уже мы видѣли $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^2 = (2p^2 + 15pqq) \sqrt{2} + (6ppq + 5q^2) \sqrt{5}$ вмѣсто сего ради краткости поставимъ $A\sqrt{2} + B\sqrt{5}$, что на $f + g\sqrt{10}$ помноживъ даетъ $Af\sqrt{2} + Bf\sqrt{5} + 2Ag\sqrt{5} + 5Bg\sqrt{2}$, которое должно быть равно $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$. откуда выходитъ $x = Af + 5Bg$ и $y = Bf + 2Ag$; а понеже $y = \pm 1$, то необходимо нужно, чибъ $6ppq + 5q^2 = 1$ было. Но довольно если только формула $Bf + 2Ag$, т. е. $f(6ppq + 5q^2) + 2g(2p^2 + 15qq)$ равно ± 1 , гдѣ f и g различныя знаменования

нованія имѣть могутъ. Пусть будетъ
наприм. $f=3$ и $g=1$, то сія формула
 $(18prrq+15q^3+4p^3+3orqq$ должна быть
равна ± 1 , или должно быть $4p^3+18prrq$
 $+3orqq+15q^3=\pm 1$.

999.

Сіе затрудненіе, выводитъ всѣ та-
кіе возможные случаи, бываетъ только
тогда, когда въ формулѣ $axx+суу$ чи-
сло c будетъ отрицательное, ибо тогда
сія формула $axx-суу$, или сія $xx-асуу$,
которая съ нею великое сходство имѣетъ
единица быть можетъ; чему однако ни-
когда спастись не лзя, когда c положи-
тельное число; понеже $axx+суу$ или
 $xx+асуу$ дастъ всегда большія числа
чѣмъ больше берутся x и y , того ради
предписанной здѣсь способъ въ такихъ
только случаяхъ съ пользою употреблять
можно, когда возмущся оба числа a и c
положительныя.

1000.

Теперь приступаемъ мы къ четвер-
той степени и прежде всего усматрива-
емъ

емъ , что ежели формула $axx+суу$ должна быть биквадратъ , то число a надлежитъ быть $=1$; ибо ежели оно не квадратъ , то или бы совсемъ не лзя сей формулы здѣлать только квадратомъ , или ежели бы возможно было , то можно бы ее превратить въ такой видъ : $xx+acy$; и такъ ограничиваемъ мы вопросъ на послѣдней формулѣ , съ которою прежняя $xx+суу$ когда $a=1$ сходствуетъ . Теперь дѣло состоятъ въ томъ какого состоянiя должны быть знаменованiя чиселъ x и y чтобъ сiя формула $xx+суу$ была биквадратъ . Она состоятъ изъ двухъ множителей $(x+y\sqrt{c})$ $(x-y\sqrt{c})$ то долженъ каждой быть биквадратъ и для того надлежитъ положить $x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})^2$ и $x-y\sqrt{c}=(p-q\sqrt{c})^2$ откуда формула наша равна будетъ сему биквадрату $(pp+ccq)^2$, а самыя буквы x и y изъ разрѣшенiя сей формулы опредѣлятся , какъ слѣдуетъ :

$$x+y\sqrt{c}$$

$x + yV - c = p^4 + 4p^3qV - c - 6cprqq - 4cprq^3V - c + ccq^4$
 $x - yV - c = p^4 - 4p^3qV - c - 6cprqq + 4cprq^3V - c + ccq^4$
 слѣдов. $x = p^4 - 6cprqq + ccq^4$ и $y = 4p^3q - 4cprq^3$.

1001.

И такъ когда $xx + yy$ долженству-
 етъ быть биквадратомъ, и понеже здѣсь
 $c = 1$, то имѣемъ мы сіи знаменованія
 $x = p^4 - 6prqq + q^4$ и $y = 4p^3q - 4prq^3$ и тогда
 будетъ $xx + yy = (pp + qq)^4$.

Положивъ наприим $p = 2$ и $q = 1$, по-
 лучится $x = 7$ и $y = 24$; отсюда будетъ
 $xx + yy = 625 = 5^4$; взявъ еще $p = 3$ и $q = 2$
 найдется $x = 119$ и $y = 120$, по чему xx
 $+ yy = 13^4$.

1002.

Во всѣхъ четныхъ степеняхъ, ко-
 ими формулу здѣлать надлежитъ, необ-
 ходимо нужно, чтобъ сію формулу ква-
 дражомъ здѣлать можно было, на ко-
 торой конецъ довольно знать одинъ
 только случай, въ которомъ сіе бываетъ;
 и тогда можно сей формулѣ, какъ уже

мы видѣли, дасть сей видъ $xx+yy$, гдѣ первый членъ умноженъ на 1, и слѣдств. въ формулѣ $xx+yy$ содержится, которую послѣ подобнымъ образомъ какъ б тою, такъ и другою еще вышшею здѣлать можно.

1003.

Въ нечетныхъ степеняхъ сей договоръ не нуженъ; но числа a и c , какого бы свойтва ни были, то завсегда можно формулу $axx+cy$ каждою нечетною здѣлать. Желая наприм. знать 5 юю степень, то надлежитъ только положить $x\sqrt{a+y\sqrt{-c}} = p\sqrt{a+q\sqrt{-c}}$ и $x\sqrt{a-y\sqrt{-c}} = (p\sqrt{a+q\sqrt{-c}})$ и будетъ очевидно $axx+cy = (arp+csq)^2$. Понсеже теперь 5 та я степень изъ $p\sqrt{a+q\sqrt{-c}}$ есть $aar^2\sqrt{a+q\sqrt{-c}} + 5aa^2\sqrt{-c} - 10acr^2qq\sqrt{a-10acrr^2q^2\sqrt{-c} + 5ccr^4q^2\sqrt{a+ccq^2\sqrt{-c}}$, откуда сразу заключить можно что $x = aar^2 - 10acrr^2qq + 5ccr^4q^2$ и $y = 5aar^2q - 10acrr^2q^2 + ccq^2$.

Потребно сумму двухъ квадратовъ $xx+yy$ здѣлать 5 тою степенью. Здѣсь $a=1$, $c=1$; когда теперь возмется только

только $p=2$ и $q=1$ будешь $x=38$, $y=4$,
и $xx+yy=3125=5^5$.



ГЛАВА XIII

О нѣкоторыхъ формулахъ сего рода
 ax^2+by^2 , коихъ квадратами
завѣдать не можно.

1004.

Много труда положено въ изобрѣщеніи
двухъ биквадратовъ, коихъ бы сумма
или разность была квадратное число;
но весь трудъ былъ тщетной, и сыска-
но на конецъ доказательство, что ни
формулы x^2+y^2 , ниже сей x^2-y^2 нико-
гда квадратомъ завѣдать не можно, вы-
ключая только 2 случая, а именно ко-
гда въ первой или $x=0$ или $y=0$; а въ
другой если $y=0$, или $y=x$, въ коню-
рыхъ случаяхъ дѣло совсемъ видно; но
что во всѣхъ остальныхъ оно не возмож-
но, тѣмъ наипаче доспомажно; ибо
когда

когда рѣчь о простыхъ квадратахъ , то
безконечно много рѣшеній имѣютъ мѣсто.

1005.

А что бы сіи доказательства надле-
жащимъ предложить порядкомъ , то
прежде всего примѣчать надлежитъ , что
оба числа x и y , какъ недѣлимые между
собою въ разсужденіе берутся; ибо еже-
ли бы они должны были имѣть общаго
дѣлителя нарим. D , такъ чтобъ мо-
жно было положить $x = Dr$ и $y = Dq$, то
была бы наша формула $D^2r^2 + D^2q^2$ и D^2r^2
 $- D^2q^2$, которые, ежели бы они были ква-
драты , раздѣливъ на D^2 остались бы
квадратами. Такъ чтобъ сіи формулы
 $r^2 + q^2$ и $r^2 - q^2$ были квадраты , гдѣ
теперь числа r и q никакого больше об-
щаго дѣлителя не имѣютъ ; и по сему
довольно доказано , что сіи формулы въ
случаѣ , когда x и y между собою недѣ-
лимы , квадратами быть не могутъ и
доказательство само по себѣ проспираси-
ся до всѣхъ случаевъ , въ коихъ x и y
общаго дѣлителя имѣютъ.

1006.

1006.

И такъ здѣлаемъ начало съ суммы двухъ биквадратовъ т. е. съ формулы $x^4 + y^4$, гдѣ мы x и y какъ недѣлимые между собою числа разсматривать будемъ; а что бы показать что $x^4 + y^4$, исключая помянутые случаи, кватратъ быть не можетъ, то производится доказательство слѣдующимъ образомъ; есть ли бы кто захотѣлъ опровергнуть наше положеніе, то бы надлежало утверждать, что такія знаменованія для x и y возможны, что бы $x^4 + y^4$ было кватратъ, оныя знаменованія сколь бы велики ни были: ибо заподлинно въ малыхъ ни одного не попадаетъ.

Но ясно показать можно, что хотя бы такія знаменованія для x и y , и въ самыхъ большихъ числахъ попались; то бы изъ оныхъ заключить можно было и о малыхъ числахъ, а изъ сихъ бы еще о меньшихъ, и такъ далѣе. Но понеже въ малыхъ числахъ такихъ знаменований нѣтъ, исключая два помянутыя,

НО

но которыя ни къ какимъ другимъ насъ не приводящъ, но заподлинно можно заключить, что и въ большихъ да и въ самыхъ пребольшихъ числахъ нѣтъ такихъ знаменованій для x и y . Равнымъ образомъ о разности двухъ биквадратовъ x^4 и y^4 доказывається, какъ мы заразъ покажемъ.

1007.

Дабы показать, что $x^4 - y^4$ квадратъ быть не можетъ, включая два случая, кои сами чрезъ себя видны, то надлежитъ примѣчать слѣдующія положенія.

I. Полагаемъ мы, что числа x и y между собою неѣлимы, или общаго дѣлителя не имѣютъ, слѣдов. оба или нечетные или одно четное, а другое нечетъ.

II. Но оба нечетныя быть не могутъ, ибо сумма двухъ нечетныхъ квадратовъ ни когда квадратомъ быть не можетъ; потому что нечетной квадратъ всегда въ формулѣ $8n + 1$ содержится, и слѣдов. сумма двухъ нечетныхъ

четныхъ квадратовъ имѣла бы формулу $8n+2$, которая на 2, а не на 4 дѣлится, и слѣдов. квадратомъ быть не можетъ; что также съ двумя нечетными биквадратами бываетъ.

III. И по сему ежели бы x^2+y^2 было квадратъ, то должно одному быть четному, а другому нечетному, какъ мы выше сего видѣли, что ежели сумма двухъ квадратовъ должна быть квадратъ, то корень одного чрезъ $pp-qq$, а другаго чрезъ $2pq$ изъяснить можно, откуда слѣдуетъ, что должно быть $xx=pp-qq$, а $yy=2pq$ и тогда бы было $x^2+y^2=(pp+qq)^2$.

IV. И такъ было бы здѣсь y четное, а x нечетное число, и $xx=pp-qq$, то надлежитъ одному изъ чиселъ p и q быть четному, а другому нечетному; но первое p не можетъ быть четное: потому что иначе $pp-qq$, какъ число формулы $4n+1$, или $4n+3$, никогда квадратомъ быть не можетъ,

желѣ, и слѣдов. должно бы быть p нечетное, а q четное, гдѣ само по себѣ разумѣется, что оныя должны быть между собою неѣлимы.

V. Когда $pp - qq$ должно быть равно квадрату xx , то учинится сіе, какъ мы прежде видѣли, ежели $p = rr + ss$ и $q = 2rs$; ибо опшуда было бы $xx = (rr - ss)^2$ и слѣдов. $x = rr - ss$.

VI. Но yy долженствуетъ также быть квадратъ, и когда мы только имѣли $yy = 2pq$, то будетъ теперь $yy = 4rs(rr + ss)$, которая формула должна быть квадратъ, слѣдов. $rs(rr + ss)$ должно быть такожде квадратъ, гдѣ r и s неѣлимыя между собою числа, и пошому находящіяся здѣсь 3 множителя r , s и $rr + ss$ общаго дѣлителя не имѣющіе.

VII. Но ежели произведеніе изъ большаго числа множителей, кои между собою неѣлимы, должно быть квадратъ, то

по каждой множитель самъ по себѣ долженъ быть квадратъ; и такъ положи $t = II$ и $u = III$, то должно также $t^2 + u^2$ быть квадратъ; и по сему ежели бы $x^2 + y^2$ было квадратное число, то бы также и $t^2 + u^2$, т. е. сумма двухъ биквадратовъ была бы квадратъ. При чемъ надлежитъ примѣчать, что было бы $xx = t^2 + u^2$ и $yy = 4tiii(t^2 + u^2)$, гдѣ очевидно числа t и u гораздо меньше нежели x и y , за тѣмъ что x и y опредѣляются уже четвертыми степенями чиселъ t и u , и слѣдов. безспорно были бы гораздо больше.

VIII. И такъ ежели бы два квадрата какъ x^2 и y^2 въ самыхъ большихъ числахъ были, то можно бы оппуда вывести сумму двухъ гораздо меньшихъ биквадратовъ, которая бы равнымъ образомъ была квадратъ; а отсюда можно бы еще о меньшихъ суммахъ заключить, и наконецъ пришли бы къ самымъ малымъ числамъ;

но когда такая сумма въ малыхъ числахъ не возможна, то слѣдуетъ изъ сего, что и въ пребольшихъ числахъ оной суммы не будетъ.

IX. Хотя и можно здѣсь сказать, что въ малыхъ числахъ дѣйствительно такія есть, какъ уже съ начала примѣчно, а именно когда одинъ биквадратъ $= 0$; но къ сему случаю заподлинно припши не лзя, когда такимъ образомъ къ малымъ назадъ пойдешь; ибо было бы въ малой суммѣ $i^2 + u^2$, или $i = 0$, или $u = 0$, то должно бы также и въ большой суммѣ быть $y = 0$, которой случай въ разсужденіе не входитъ.

1008.

Теперь приступаемъ мы къ другому главному положенію, что и разность двухъ биквадратовъ $x^2 - y^2$ никогда квадратомъ быть не можетъ, кромѣ случаевъ $y = 0$ и $y = x$: ради сего доказательства надлежитъ примѣчать слѣдующіе пункты.

I.

I. Когда числа x и y между собою недѣлимы, и слѣдов. или оба нечетныя, или одно четное, а другое нечетно, то въ обоихъ случаяхъ разность двухъ квадратовъ можетъ быть паки квадратъ; чего ради сии два случая особливо примѣчать должно.

II. И такъ пусть будутъ въ первыхъ оба числа x и y нечетныя; и положи $x = p + q$, а $y = p - q$, и тогда одно изъ чиселъ p и q должно быть четное, а другое нечетно, то будетъ $xx - yy = 4pq$, $xx + yy = 2pp + 2qq$, слѣдов. наша формула $x^2 - y^2 = 4pq(2pp + 2qq)$, которая должна сплывуется быть квадратъ, почему и четвертая ея часть, т. е. $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, коей множители между собою недѣлимы, и слѣдов. каждый долженъ быть квадратъ; а понеже одно число p четное, а другое q нечетно, то имѣемъ мы 3хъ между собою недѣлимыхъ множителей $2p$, q и $pp + qq$. И такъ чтобъ первые два являлись квадратами, то положи $2p = 4rr$, или

$$p = 2rr$$

$$q = 2rr$$

$p=2rr$, а $q=ss$, гдѣ s нечетъ будетъ третьей множитель $4r^2+s^2$, которой также квадратъ быть долженъ.

III. Но s^2+4r^2 есть сумма двухъ квадратовъ, изъ которыхъ s^2 нечетъ, а $4r^2$ четъ, то положи корень перваго $ss=tt-uu$, гдѣ t нечетъ, а u четъ, послѣдней же $2rr=2tu$, или $rr=tu$, гдѣ t и u между собою не-дѣлимы.

IV. Понеже $tu=rr$ квадратъ быть долженствуетъ, то какъ t такъ и u надлежитъ быть квадратомъ; сего ради положи $t=mm$ а $u=nn$, гдѣ m нечетъ, а n четъ, будетъ $ss=m^2-n^2$ такъ что опять разность двухъ биквадратовъ, а именно m^2-n^2 должна быть квадратъ, но явно есть, что сѣи числа были гораздо меньше нежели x и y .

Потому что r и s очевидно меньше нежели x и y , а сверхъ сего еще m и n меньше нежели r и s , и такъ ежели бы въ большихъ числахъ дѣло было возмо-

жное и $x^4 - y^4$ было бы квадратъ, то было бы и въ самыхъ малыхъ также возможно, и такъ далѣе, пока бы не пришли къ самымъ малымъ числамъ, гдѣ бы дѣло было возможное.

V. Но самыя меньшія числа, въ которыхъ сіе возможно, суть когда одинъ биквадратъ равенъ 0, или равенъ другому. По первому надлежало бы быть $n=0$, слѣдов. $u=0$, потомъ $r=0$ и $p=0$, $x=y$, или $x^4=y^4$; но здѣсь о такомъ случаѣ не говорится. А ежели бы $n=m$, то было бы $l=u$, потомъ $r=0$ и $q=0$ и наконецъ $x=y$, которой случай мѣста здѣсь не имѣетъ.

1009.

Здѣсь можно сказать, что когда m нечетъ, а n четъ, то послѣдняя разность не сходствуемъ больше съ первою, и такъ отсюда далѣе о малыхъ числахъ заключать не лзя. Но довольно когда отъ первой разности дошли до другой

и теперь покажемъ, что также $x^2 - y^2$ квадратомъ быть не можетъ, когда одинъ биквадратъ четной, а другой нечетной.

I. По первому когда бы x^2 четъ, а y^2 нечетъ, то бы дѣло само по себѣ было не возможное, потому что вышло бы число формулы $4n + 3$, которое квадратомъ быть не можетъ. И по сему пусть будетъ x нечетъ, а y четъ, то должно быть $xx = rr + qq$ и $yy = 2rq$ и тогда выдешъ $x^2 - y^2 = r^2 - 2rrqq + q^2 = (rr - qq)^2$, гдѣ изъ r и q одно должно быть четное, а другое нечетное.

II. когда $rr + qq$ должно быть квадратъ, то будетъ $r = rr - ss$, а $q = 2rs$, слѣдов. $x = rr + ss$; но отсюда $yy = 2(rr - ss)2rs$ или $yy = 4rs(rr - ss)$, которое должно быть квадратъ и слѣдоват. четвертая онаго также часть т. е. $rs(rr - ss)$, гдѣ множители между собою недѣлимы.

III. И такъ положивъ $r = ii$, $s = iii$ будетъ третьей множитель $rr - ss = i^2 - ii^2$, которой

которой равнымъ образомъ долженъ быть квадратъ ; но оной также есть разность двухъ биквадратовъ , кои гораздо меньше первыхъ , то получаетъ чрезъ сие доказательство совершенную крѣпость ; такъ что ежели бы въ большихъ числахъ разность двухъ биквадратовъ была квадратъ , то бы можно отсюда найти всегда меньшіе такіе разности , не приходя къ очевиднымъ двумъ случаямъ ; и по сему заподлинно въ большихъ числахъ сие также не возможно.

ІОІО.

Первую часть сего доказательства, когда оба числа x и y взяты нечетныя , можно сократить слѣдующимъ образомъ. Ежели бы $x^2 - y^2$ было квадратъ то должно бы быть $xx = pp + qq$ и $yy = pp - qq$, гдѣ изъ буквъ p и q одна четная, а другая нечетъ ; но тогда бы вышло $xx - yy = p^2 - q^2$, слѣдов. $p^2 - q^2$ должно бы также быть квадратомъ , что есть раз-

ность двухъ такихъ биквадратовъ, изъ
коихъ одинъ четной, а другой нечетъ,
а что сему спастись не лзя, то вторая
доказательства часъ показываетъ.

1011.

И такъ доказали мы сіи два глав-
ныя правила, что ни сумма, ни раз-
ность двухъ биквадратовъ никогда ква-
дратнымъ числомъ быть не можеть,
выключая немногіе очевидные случаи.

Почему ежели другіе формулы, кои
квадратами здѣлать надлежитъ, такого
свойства будутъ, что или сумма или
разность двухъ биквадратовъ должна быть
биквадратъ, то равнымъ образомъ та-
кіе формулы не возможны. Сіе случает-
ся въ ниже слѣдующихъ формулахъ, кои
мы присовокупить намѣрены.

- I. Не возможно чтобъ формула $x^2 + 4y^2$
была квадратъ, ибо она есть сумма
двухъ биквадратовъ; то должно бы
быть $xx = rr - qq$ и $2yy = 2rq$, или $yy = rq$,
но r и q между собою недѣлимые чи-
сла

сла, и для того надлежало бы каждому быть квадратомъ; сего ради положивъ $p=rr$, $q=ss$ будемъ $xx=r^2-s^2$ и слѣдов. разность двухъ биквадратовъ должна быть квадратъ, чему спастся не лзя.

II. Не можно также чпобъ формула x^2-4y^2 была квадратъ; ибо надлежало бы быть $xx=pp+qq$, $2yy=2pq$, но тогда вышло бы $x^2-4y^2=(pp-qq)^2$: но $yy=pq$, то должно бы p и q каждому быть квадратомъ. Взявъ $p=rr$, $q=ss$ получится $xx=r^2+s^2$, слѣдов. сумма двухъ биквадратовъ долженствовала бы быть квадратомъ, чему спастся не лзя.

III. Формула $4x^2y^2$ не можетъ также быть квадратомъ; ибо тогда y неопмѣнно должно бы быть четное число: положивъ $y=2z$ было бы $4x^2-16z^2$ и четвертая сего часть x^2-4z^2 должна быть квадратъ; что по прежнему не возможно.

IV.

IV. Формулѣ $2x^4 + 2y^4$ квадратомъ быть не лзя, потому что оной долженъ быть четной и слѣд. $2x^4 + 2y^4 = 4zz$, то вышло бы $x^4 + y^4 = 2zz$, и по сему $2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$, слѣдов. квадратъ. Равнымъ образомъ было бы $2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$ также квадратъ. Но понеже какъ $2zz + 2xxyy$ такъ и $2zz - 2xxyy$ вышли бы квадраты, то надлежало бы ихъ произведенію $4z^2 - 4x^2y^2$ и четвертой его части быть квадратомъ; но сія четвертая часть есть $z^2 - x^2y^2$ и слѣдов. разность двухъ биквадратовъ, чему спастись не можно.

V. На конецъ формула $2x^4 - 2y^4$ квадратомъ быть не можетъ; ибо оба числа x и y нечетныя; въ противномъ случаѣ имѣли бы они общаго дѣлителя. Также одно четное, а другое нечетное быть не могутъ: потому что иначе одна бы часть на 4, а другая только на 2 и слѣдов. самая формула на 2 только могла бы раздѣляться; для того надлежитъ сбить

имѣ быть нечетнымъ. Возми $x=r+q$ и $y=r-q$, то одно изъ чиселъ r и q четное, а другое нечетно, и понеже $2x^4 - 2y^4 = 2(xx+yy)(xx-yy)$, то получится $xx+yy=2rr+2qq=2(rr+qq)$, а $xx-yy=4rq$, и по сему формула наша $16rq(rr+qq)$ и 16-тая ея часть $rq(rr+qq)$ должна быть также квадратомъ. Но когда множители между собою не-дѣлимы, то каждому надлежитъ быть квадратомъ. Положивъ вмѣсто двухъ первыхъ $r=rr$, $q=ss$ будетъ претей $=r^4+s^4$, которой также долженъ бы быть квадратомъ; но сему спастись не можно.

1012.

Подобнымъ образомъ доказать можно, что формула x^4+y^4 квадратомъ быть не можетъ; самое же доказательство состоитъ въ слѣдующихъ положеніяхъ.

1. x не можетъ быть четное число, ибо y было бы нечетное и формула могла бы только на 2, а не на 4 раздѣлиться,

дѣлиться ; чего ради x должно быть нечетное число.

II. Положи квадратной корень формулы нашей $=xx + \frac{2pyy}{q}$, чтобы оной былъ

нечетъ и будетъ $x^2 + 2y^2 = x^2 + \frac{4pxyy}{q} + \frac{4p^2y^2}{qq}$, гдѣ x^2 уничтожается , а

остальные члены раздѣливъ на yy и помноживъ на qq даютъ $4pqxx + 4p^2yy = 2qqyy$, или $4pqxx = 2qqyy - 4p^2yy$, отсю-
да $\frac{xx}{yy} = \frac{qq - 2p^2}{2pq}$, слѣдовательно $xx = qq - 2p^2$, а $yy = 2pq$, такіе же форму-
лы , какъ и прсждс были.

III. И такъ $qq - 2p^2 = xx$ надлежало бы пакъ
быть квадратъ , что иначе учиниться
не можетъ , какъ только ежели $q = rr + 2ss$, а $p = 2rs$, и тогда бы было $xx = (rr + 2ss)^2$, а попомъ $yy = 4rs(rr + 2ss)$
и четвертая сего также часть $rs(rr + 2ss)$
должна бы быть квадратъ , слѣдов. r
и

и z каждой особливо. Положивъ $t = tt$, $z = uu$ будетъ прешей множителъ $tt + 2zz = t^4 + 2u^4$, копорой шакже долженъ быть квадратъ.

IV. Чего ради ежели бы $x^4 + 2y^4$ было квадратъ, то бы и $t^4 + 2u^4$ было квадратомъ, гдѣ числа t и u были бы гораздо менше нежели x и y , и такимъ бы образомъ завсегда доходить можно было до меньшихъ чиселъ; но когда сія формула въ малыхъ числахъ квадратомъ быть не можетъ то она, какъ легко усмотрѣть можно, не будетъ также квадратомъ и въ большихъ числахъ.

1013.

Что же напротивъ того до формулы $x^4 - 2y^4$ касается, то объ ней доказать не лзя, чшобъ она не могла быть квадратомъ; и когда подобнымъ образомъ изчисленіе производить станешъ, то можно безконечно много найти случаевъ, въ копорыхъ она дѣйствительно будетъ квадратъ; ибо ежели $x^4 - 2y^4$ должно-

жно быть квадратомъ . то выше сего показано, что $xx = pp + 2qq$, а $y = 2pq$, и получился тогда $x^2 - 2y^2 = (pp - 2qq)^2$; но и $pp + 2qq$ также квадратъ быть долженствуетъ. Сіе учинится ежели $p = rr - 2ss$, а $q = 2rs$ и будетъ $xx = (rr + 2ss)^2$. Но здѣсь примѣчать надлежитъ, что здѣлалось бы сіе положивъ $p = 2ss - rr$, $q = 2rs$; по чему сіи два случая разсмотрѣть должно.

I. Пусть будетъ во первыхъ $p = rr - 2ss$, $q = 2rs$, и будетъ $x = rr + 2ss$; а понеже $yy = 2pq$. то $yy = 4rs(rr - 2ss)$ и должны r и s быть квадратами : чего ради взявъ $r = ii$ $s = uu$, будетъ $yy = 4iiuu(i^2 - 2u^2)$ и слѣдов. $y = 2iu\sqrt{i^2 - 2u^2}$; а $x = i^2 + 2u^2$.

И такъ ежели $i^2 - 2u^2$ есть квадратъ, то будетъ также $x^2 - 2y^2$ квадратъ. Хотя i и меньшія числа нежели x и y , то не лзя по прежнему заключить чшобъ $x^2 - 2y^2$ могло быть квадратъ, понеже отсюда приходимъ мы къ подобной формулѣ въ меньшихъ числахъ; ибо $x^2 - 2y^2$

$-2y^*$ можетъ быть квадратъ не доходя до формулы i^*-2u^* , потому что сіе инымъ образомъ учиниться можетъ, а именно: въ другомъ случаѣ, которой мы еще разсмотримъ имѣемъ.

II. По сему пусть будетъ $p=2ss-rr$, $q=2rs$, то хотя и будетъ по прежнему $x=rr+2ss$; но для y получится $yy=2pq=4rs(2ss-rr)$. Взявъ теперь $r=ii$, $s=ui$ получится $yy=4uiii(2u^*-i^*)$. слѣд. $y=2uiV(2u^*-i^*)$, а $x=i^*+2u^*$; откуда явствуетъ, что формула наша x^*-2y^* также квадратъ быть можетъ, ежели сія $2u^*-i^*$ квадратомъ будетъ. Сіе очевидно сдѣлается, когда $i=1$, $u=1$, почему получимъ $x=3$, $y=2$, откуда формула наша будетъ $81-2.16=49$.

III. Мы уже прежде видѣли, что $2u^*-i^*$ будетъ квадратъ, когда $u=13$ и $i=1$, потому что тогда $V(2u^*-i^*)=239$. Поставивъ теперь сіи знаменованія вмѣсто i и u получимъ новый случай для нашей формулы; а именно $x=1+2.13^2=57123$ и $y=2.13.239=6214$.

Тамъ II.

Э

IV.

IV. Но какъ скоро найдены знаменованія вмѣсто x и y , то можно оныя поставить въ формулѣ Но I, вмѣсто i и u и получающа новыя вмѣсто x и y .

Нашедъ $x=3$, $y=2$, положимъ въ первомъ рѣшеніи $i=3$, $u=2$, и тогда $V(i^2-2u^2)=7$, то получимъ новыя знаменованія $x=81+2.16=113$ и $y=2.3.2.7=84$, а отсюда найдемъ $xx=12769$, $x^2=163047361$, потомъ $yy=7056$, $y^2=49787136$, по сему будетъ $x^2-2y^2=63473089$ чего квадратной корень есть 7967, которой во всемъ сходствуетъ съ положенными съ начала $pp-2qq$; ежели $i=3$, $u=2$ будетъ $r=9$ и $s=4$, чего ради $p=81-32=49$ и $q=72$; отсюда $pp-2qq=2401-10368=-7967$.

ГЛАВА XIV.

Разрѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ принадлежащихъ до сей части аналитики.

1014.

До сихъ поръ изъясняли мы нужныя приемы случающіеся въ сей части аналитики, дабы рѣшить всѣ сюда принадлежащія вопросы, и сіе самое намѣрены мы здѣсь пространнѣе изъяснить нѣкоторыми предложенными вопросами съ ихъ рѣшеніемъ.

1015.

Вопросъ. Нѣйши число, къ которому когда придастся, или изъ онаго вычтется 1, то бы въ обоихъ случаяхъ вышелъ квадратъ?

Положи искомое число x , то какъ $x+1$, такъ и $x-1$ должно быть квадратъ, для перваго возми $x+1=pp$, будетъ $x=pp-1$, а $x-1=pp-2$, что такъ же должно быть квадратомъ. Положивъ корень его $p-q$ будетъ $pp-2=pp-2pq+qq$, гдѣ

2 2
 pp

rp уничтожается и найдется $p = \frac{qq+2}{2q}$,

а отсюда потомъ сыщется $x = \frac{q^2+4}{4q}$.

гдѣ q по изволенью и въ дробяхъ также

взявъ можно; того ради положи $q = \frac{r}{s}$

и получится $x = \frac{r^2+4s^2}{4rss}$, котораго мень-

шій знаменовація здѣсь предложимъ.

$$\begin{array}{l} \text{когда } r=1 \mid 2 \mid 1 \mid 3 \\ \quad \quad s=1 \mid 1 \mid 2 \mid 1 \\ \text{будетъ } x=\frac{5}{4} \mid \frac{3}{4} \mid \frac{65}{16} \mid \frac{95}{36} \end{array}$$

ГОІБ.

Вопросъ. Сыскаешь число, къ ко-
рому когда два произволящія числа на
прим. 4 и 7 придадутся, то бы въ обо-
ихъ случаяхъ вышли квадраты?

По сему двѣ Формулы $x+4$ и $x+7$
долженствуютъ быть квадраты, чего
ради положи для первой $x+4=rp$, будетъ
 $x=rp-4$; а другая формула $rp+3$ так-
же

же квадратомъ быть должна ; положивъ
ся корень $=p+q$ будетъ $pp+3=pp+2pq$
 $+qq$, откуда найдется $p=\frac{3-qq}{2q}$, слѣд.

$x=\frac{9-22qq+q^4}{4q^2}$. Взявъ вмѣсто q дробь $\frac{r}{s}$,

получимъ $x=\frac{9s-22rrss+r^4}{4rrss}$, гдѣ вмѣ-

сто r и s всѣ произволяющія числа брать
можно.

Положи $r=1$ и $s=1$ будетъ $x=-3$,
а отсюда $x+4=1$, $x+7=4$. Но ежели
пожелашь имѣть вмѣсто x положитель-
ныя числа, то возьми $s=2$, $r=1$ и полу-
чится $x=\frac{57}{16}$, и почему $x+4=\frac{121}{16}$ и $x+7=\frac{166}{16}$.
Еслили же положить $s=3$, $r=1$, то най-
дется $x=\frac{133}{9}$, откуда $x+4=\frac{169}{9}$ и $x+7=\frac{196}{9}$.

Но когда послѣдней членъ дол-
женъ превышать средней, то возьми
 $r=5$, $s=1$, и будетъ $x=\frac{21}{25}$, а отсюда
 $x+4=\frac{121}{25}$ и $x+7=\frac{196}{25}$.

1017.

Вопросъ. Сыскать такую дробь, ко-
торую когда или придашь къ 1, или

В 3

вы-

вычтешь изъ оной , чтобъ въ обоихъ случаяхъ вышелъ квадратъ ?

Когда сіи двѣ формулы $1+x$ и $1-x$ должны быть квадратами, то положи для первой $1+x=pp$, будетъ $x=pp-1$, а другая формула $1-x=2-pp$, также должна быть квадратомъ ; но здѣсь ни первой ни послѣдней членъ не квадраты , то надлежитъ смотрѣть нельзя ли попасть на такой случай , въ которомъ сіе дѣлается. Такой случай заразъ попадается , а именно, когда $p=1$, для того возьми $p=1-q$, такъ что $x=qq-2q$ и будетъ наша формула $2-pp=1+2q-qq$, коей корень положивъ $=1-qr$, получимся $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$, отсюда $2-q=2r+qrr$ и $q=\frac{2r+2}{rr+1}$, почему $x=\frac{4r-4r^2}{(rr+1)^2}$

Понеже r есть дробь , то возьми $r=\frac{t}{u}$, и будетъ $x=\frac{4tu^2-4t^2u}{(t^2+u^2)^2}=\frac{4tu(u-t)}{(t^2+u^2)^2}$, слѣдов. и должно быть меньше нежели 1. и по сему положи $u=2$, $t=1$ выйдетъ $x=\frac{1}{4}$; взявъ $u=3$, $t=2$ найдемъ $x=\frac{12}{25}$,

а отсюда $1+x=\frac{220}{105}$, $1-x=\frac{40}{105}$, кои оба суть квадраты.

1018.

Вопросъ. Найти такія числа x , которыя когда къ 10 придадутся, или изъ 10 вычтутся, чтобъ вышли квадраты?

Объ сѣи формулы $10+x$ и $10-x$ должны быть квадратами, и сѣе могло бы учинишся по прежнему способу; но чтобъ показать другой путь, то приведи себѣ на память, что и произведение сихъ формулъ должно быть также квадратъ, а именно $100-xx$. Но здѣсь первой членъ уже квадратъ, то положи корень $=10-rx$, и будешъ $100-xx=100-20rx+rrxx$, откуда $x=\frac{20r}{rr+1}$, но изъ сего слѣдуетъ, что произведение только квадратъ, а не каждое число особливо. Если же одно будешъ квадратъ, то и другое неотмѣнно также быть должно.

Первое здѣсь $10+x=$

$$\frac{10rr + 20r + 10}{rr + 1} = \frac{10(rr + 2r + 1)}{rr + 1}, \text{ но}$$

$rr + 2r + 1$ уже квадратъ, но надлежитъ еще ссей дроби $\frac{10}{rr + 1}$ быть квадратомъ,

слѣдов. и ссей $\frac{10rr + 10}{(rr + 1)^2}$. Теперь нужно

только, чтобъ число $10rr + 10$ было квадратомъ, гдѣ опять случай отгадать надлежитъ. Оной будетъ, когда $r = 3$;

что ради положивъ $r = 3 + q$ получится $100 + 60q + 10qq$, возьми сего корень $= 10 + qr$, и будетъ $100 + 60q + 10qq = 100 + 20qr + qqrr$, откуда $q = \frac{60 - 20r}{rr - 10}$,

потомъ $r = 3 + q$ и $x = \frac{20r}{rr + 1}$.

Взявъ $r = 3$, будетъ $q = 0$, $r = 3$ и $x = 6$; отсюда $10 + x = 16$ и $10 - x = 4$. Но когда возмемъ $r = 1$, то получится $q = -\frac{10}{9}$, $r = -\frac{13}{9}$ и $x = -\frac{234}{25}$; но все равно положишь $x = \frac{234}{25}$ и будетъ $10 + x = \frac{434}{25}$ и $10 - x = \frac{16}{25}$, кои оба суть квадраты.

1019.

Примѣчаніе. Ежели соизволишь сей вопросъ здѣлать всеобщимъ и для каждаго даннаго числа a число x найти пожелаешь, что бы какъ $a+x$ такъ и $a-x$ были квадраты, то рѣшеніе сіе бываетъ иногда не возможно, а именно во всѣхъ случаяхъ, гдѣ число a меньше суммы двухъ квадратовъ. Мы уже прежде видѣли, что отъ 1 до 50 слѣдующія числа суммы двухъ квадратовъ, или кои въ формулѣ $xx+yy$ содержатся:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50. слѣдоват. остальные 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48 не могутъ раздѣлиться на два квадрата. Слѣдов. какъ скоро a будетъ одно изъ сихъ послѣднихъ чиселъ, то вопросъ будетъ невозможной.

Для изъясненія сего положивъ $a+x=pp$ и $a-x=qq$ найдемъ по сложению

25

нѣю

нїю $2a = pp + qq$, такъ что $2a$ должно быть суммою квадратовъ. Но когда $2a$ есть такая сумма, то и a также быть долженствуетъ и по сему ежели a не будетъ сумма двухъ квадратовъ, то не возможно, чтобъ $a+x$ и $a-x$ были квадратами.

1020.

По сему когда $a=3$, то вопросъ невозможенъ, для того 3 не сумма двухъ квадратовъ. Хотя и можно сказать, что найдутся можетъ быть два квадрата въ ломаныхъ числахъ, коихъ сумма составитъ квадратъ; но и сему также спастись не лзя: ибо ежели бы было $3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss}$, то помноживъ на $qqss$ вышло бы $3qqss = prss + qqr r$, гдѣ $prss + qqr r$ есть сумма двухъ квадратовъ, которые бы на 3 могли раздѣлиться; но мы прежде видѣли, что сумма двухъ квадратовъ другихъ дѣлителей имѣть не можетъ кромѣ пѣхъ, кои сами суть такія же суммы.

Хотя

Хотя числа 9 и 45 на 3 раздѣлишь можно, но оныя также и на 9 дѣлимы; да и каждой приплюснъ квадраты, изъ которыхъ они состоятъ, а именно $9=3^2+0^2$ и $45=6^2+3^2$; что здѣсь мѣста не имѣетъ. По чему сіе слѣдствіе справедливо, что ежели число a въ цѣлыхъ числахъ суммою двухъ квадратовъ не будетъ, то сему и въ дробяхъ статься не лзя. А когда число a въ цѣлыхъ числахъ сумма двухъ квадратовъ, то оно и въ дробяхъ бесконечно многими способами быть можетъ суммою двухъ квадратовъ, что мы показать намѣрены.

1021.

Вопросъ. Число, которое есть сумма двухъ квадратовъ, раздробить бесконечно многими способами на суммы двухъ квадратовъ?

Пусть будетъ предложенное число $ff+gg$, и надлежитъ сыскать другіе два квадрата, яко $xx+yy$ коихъ сумма $xx+yy$ равна числу $ff+gg$, такъ что $xx+yy$
 $=ff$

$=ff+gg$. Здѣсь заразъ видно, что ежели x будетъ больше или меньше нежели f , то напротивъ того y долженъ быть меньше или больше числа g ; чего ради возьми $x=f+pz$; $y=g-qz$ и будетъ $ff+2fpz+ppzz+gg-2gqz+qqzz=ff+gg$, гдѣ ff и gg уничтожаются, а остальные члены на z могутъ раздѣлиться; и получится $2fp+ppz-2gq+qqz=0$, или $ppz+qqz=2gq-2fp$, слѣдов. $z=\frac{2gq-2fp}{pp+qq}$, откуда для x и y слѣдующія найдутся знаменования $x=\frac{2gfp+g(pp-qq)}{pp+qq}$, и $y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}$, гдѣ вмѣсто p и q всѣ возможные числа брать можно. Пусть наприм. данно число будетъ 2, такъ что $f=1$ и $g=1$, будетъ $xx+yy=2$; когда $x=\frac{2fq+qq-pp}{pp+qq}$ и $y=\frac{2pq+pp-qq}{pp+qq}$, то положивъ $p=2$, а $q=1$ найдемъ $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{7}{2}$.

1022.

Вопросъ. Когда число a есть сумма двухъ квадратовъ, найди такія числа, чтобъ какъ $a+x$, такъ и $a-x$ были квадраты?

Пусть данное число $a=13=9+4$:
взявъ $13+x=rr$, $13-x=qq$, сложение
дася въ первыхъ $26=rr+qq$, а вычи-
таніе $2x=rr-qq$; слѣдов. r и q такого
состоянія быть должны, чтобъ $rr+qq$
равно было 26 ти, которое число есть
также сумма двухъ квадратовъ, а имен-
но $25+1$, и такъ сіе число 26 над-
лежитъ раздробить на 2 квадрата, изъ
коихъ большей взять вмѣсто rr , а мень-
шей вмѣсто qq и получится $r=5$, $q=1$,
откуда $x=12$. А попомъ по прежнему
число 26 можно безконечно многими
способами раздѣлить на два квадрата:
посаж $f=5$ и $g=1$, то ежели въ пре-
жнихъ формулахъ вмѣсто буквъ r и q
напишемъ i и u , а на мѣсто x и y
поставимъ p и q , то найдемъ $p=$
 $\frac{2iu+5(uu-ii)}{ii+uu}$ и $q=\frac{10iu+ii-uu}{ii+uu}$. Когда же

теперь

теперь возмущся вмѣсто t и u числа по изволѣнію и опредѣляющія изъ нихъ буквы p и q , то получится искомое число $x = \frac{pp - qq}{2}$

Пусть будетъ на прим. $t = 2$, $u = 1$, то выйдетъ $p = 1$, и $q = 2$, слѣдов. $pp - qq = 1 - 4 = -3$ и $x = \frac{-3}{2}$

1023.

А что бы сему вопросу дать общее рѣшеніе, то пусть данное число будетъ $a = cc + dd$, а искомое $= z$, такъ что сіи формулы $a + z$ и $a - z$ должны быть квадратами.

Положивъ $a + z = xx$ и $a - z = yy$ будетъ въпервыхъ $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$; слѣдов. квадраты x и y такого свойства должны, чтобъ $xx + yy = 2(cc + dd)$, гдѣ $2(cc + dd)$ есть также сумма двухъ квадратовъ, а именно: $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Возми ради краткости $c + d = f$, $c - d = g$, такъ что будетъ $xx + yy = ff + gg$; но сіе по прежнему

нему учинится ваявѣ $x = \frac{2gprq - f(qq - fp)}{pp + qq}$ и

$y = \frac{2fprq + g(pp - qq)}{pp + qq}$, откуда получаемъ

самое легкое рѣшеніе, когда положимъ $p=1$ и $q=1$; ибо тогда найдемся $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$, а $y = f = c + d$; слѣдов. $z = 2cd$; а отсюда $cc + dd + 2cd = (c + d)^2$ и $cc + dd - 2cd = (c - d)^2$. Для нахожденія другаго рѣшенія пусть будетъ $p=2$, $q=1$

и выдетъ $x = \frac{c - 7d}{5}$, а $y = \frac{7c + d}{5}$, гдѣ

какъ c и d такъ x и y можно взять отрицательными, потому что ихъ квадраты только входятъ; но когда x долженъ быть больше нежели y , то возьми d отрицательное, и найдемся $x = \frac{c + 7d}{5}$, а

$y = \frac{7c - d}{5}$; откуда $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$,

которая величина когда придастся къ a ,

то дастъ $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$, чего квадрат-

ной корень есть $\frac{c + 7d}{5}$. Если же z вы-

читенъ

чтешь изъ a , то останется $\frac{49cc-14cd+dd}{25}$

сего квадратной корень есть $\frac{7c-d}{5}$

т. е. первой x , а сей y .

1024.

Вопросъ. Найми число x , такое что ежели какъ къ нему самому, такъ и къ его квадрату xx придастся 1, тобъ въ обоихъ случаяхъ вышли квадраты ?

По сему обѣ формулы $x+1$ и $xx+1$ надлежитъ здѣлать квадратами : чего ради положи для первой $x+1=pp$ и будетъ $x=pp-1$; а вторая формула $xx+1=p^4-2pp+2$, также должна быть квадратомъ ; но она есть такого свойства, что никакого рѣшенія найми не можно, прежде нежели извѣстнаго случая не будетъ ; а такой случай заразъ попадаетъ, а именно : когда $p=1$; для того возми $p=1+q$, и будетъ $xx+1=1+4qq+4q^2+q^4$, что многими способами квадратомъ здѣлать можно.

I. Взявъ корень $= 1 + qq$, будетъ $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 2qq + q^4$, откуда $4q + 4qq = 2q$, $4 + 4q = 2$ и $q = -\frac{1}{2}$; слѣдов. $p = \frac{1}{2}$, а $x = -\frac{3}{4}$.

II. Положивъ корень $= 1 - qq$ получимся $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 2qq + q^4$, откуда $q = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{2}$, слѣдов. $x = -\frac{3}{4}$, какъ и прежде.

III. Возми корень $= 1 + 2q + qq$, чтобы первые и два послѣдніе члены уничтожились, и будетъ $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6qq + 4q^3 + q^4$; отсюда $q = -2$ и $p = 1$, по чему $x = 0$.

IV. Можно также положить корень $= 1 - 2q - qq$, и будетъ $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2qq + 4q^3 + q^4$, откуда $q = -2$, какъ и прежде.

V. Для уничтоженія 2хъ первыхъ членовъ возми корень $= 1 + 2qq$, и будетъ $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4qq + 4q^3$, откуда $q = \frac{1}{2}$ и $p = \frac{7}{8}$, слѣдов. $x = \frac{10}{9}$, а изъ сего $x + 1 = \frac{19}{9} = (\frac{7}{3})^2$ и $xx + 1 = \frac{1681}{81} = (\frac{41}{9})^2$.

Томъ II.

Ю

Когда

Когда кто пожелаетъ сыскать больше знаменованій вмѣсто q , то надлежитъ взять одно изъ найденныхъ напр. $-\frac{1}{2}$ и положить потомъ $q = -\frac{1}{2} + r$, но отсюда было бы $p = \frac{1}{2} + r$, $pp = \frac{1}{4} + r + rr$ и $p^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4$; по чему формула наша $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4$, которая должна быть квадратамъ, и слѣдов. умноженная на 16 также п. с. $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4$, которой формулы возми

I. корень $5 + fr + 4rr$, такъ что $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr + 40rr + 8fr^3 + 16r^4$; но послѣдніе члены здѣсь уничтожаются,

по опредѣли f такъ, чтобы и вторые члены уничтожились, что учинится положивъ $-24 = 10f$, слѣдов. $f = -\frac{12}{5}$, остальные члены раздѣливъ на rr дадутъ $-8 + 32r = +40 + ff + 8fr$; удержавъ верхней знакъ будетъ $-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$.

откуда $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$; но $f = -\frac{12}{5}$, то $r = \frac{21}{25}$, слѣдов. $p = \frac{11}{5}$ и $x = \frac{561}{250}$, а отсюда $xx + 1 = \left(\frac{619}{250}\right)^2$ II,

II. Взявъ нижней знакъ будешь $-8+32r$
 $= -40 + ff - 8fr$, и найдется $r = \frac{ff-32}{32+8f}$,
 но $f = -\frac{1}{2}$, то $r = -\frac{11}{16}$, слѣдов. $p = \frac{11}{16}$, и
 отсюда прежне выходишь уравненіе.

III. Пустьъ будешь корень $4rr + 4r + 5$,
 такъ что $16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 = 16r^4 +$
 $32r^3 + 10rr + 40r + 25$, гдѣ два первые
 и послѣдней членъ уничтожаются, а
 остальные раздѣливъ на r даюшь $-8r$
 $-24 = +40r + 16r + 40$, или $-24r - 24$
 $= +40r + 40$; взявъ верхней знакъ бу-
 деть $-24r - 24 = 40r + 40$ или, $0 = 64r + 64$,
 или $0 = r + 1$, т. е. $r = -1$ и $p = -\frac{1}{2}$, ко-
 торой случай уже мы имѣли, и тогда
 же самой слѣдуетъ когда возмѣтися
 исподней знакъ.

IV. Положивъ корень $= 5 + fr + grr$ опре-
 дѣли буквы f и g , такъ чтобъ 3
 первые члена уничтожились. Понеже
 здѣсь $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr$
 $+ 10grr + ffr + 2fgr^2 + ggr^3$, то во первыхъ

$-24 = 10f$, слѣдов. $f = -\frac{12}{5}$; потомъ -8
 $= 10g + ff$, по чему $g = -\frac{8}{10} \frac{ff}{f}$ или $g = -$

$\frac{346}{250} = -\frac{173}{125}$; а оба послѣдніе члена раздѣ-
 ливъ на r^2 даютъ $32 + 16r = 2fg + ggr$,

откуда $r = \frac{2fg - 32}{16 - gg}$. Здѣсь числитель

$2fg - 32 = \frac{24 \cdot 172 - 32 \cdot 625}{5 \cdot 125} = -\frac{32 \cdot 496}{625}$, или

$-\frac{16 \cdot 32 \cdot 31}{625}$, а знаменатель $16 - gg =$

$(4 + g)(4 - g) = \frac{328 \cdot 672}{125 \cdot 125}$, или $9 \frac{41 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 21}{25 \cdot 625} =$

$\frac{8 \cdot 32 \cdot 41 \cdot 21}{25 \cdot 625}$; отсюда $r = -\frac{1550}{865}$ и $p = -\frac{2219}{17 \cdot 125}$; а

изъ сего новое означеніе числа x
 найдется т. е. $x = pr - 1$.

1025.

Вопросъ. Къ даннымъ тремъ числамъ a ,
 b и c найти такое число x , которое
 если къ каждому изъ нихъ прило-
 жится, то произойдутъ квадраты,
 т. е. съ 3 формулы $x + a$, $x + b$ и
 $x + c$ надлежитъ здѣлать квадратами?

Положи

Положи для первой $x + a = zz$, такъ что $x = zz - a$, то прочія формулы будутъ $zz + b - a$ и $zz + c - a$, изъ коихъ каждая должна быть квадратомъ; но сему общаго рѣшенія дать не лзя, потому что сіе часто бываше не возможно и зависить единственно отъ свойства обоихъ чиселъ $b - a$ и $c - a$; ибо ежели бы наприм. было $b - a = 1$ и $c - a = -1$. т. е. $b = a + 1$ и $c = a - 1$, то должно бы обѣимъ формуламъ быть квадратами, а именно: $zz + 1$ и $zz - 1$, гдѣ всѣ сомнѣнія z долженствуетъ быть дробь; чего ради положивъ $z = \frac{p}{q}$ были бы сіи формулы квадратами, а именно: $pp + qq$ и $pp - qq$, слѣдов. и ихъ произведение т. е. $p^2 - q^2$ также должно быть квадратъ; но что сему спастся не лзя, прежде сего уже показано.

Когда $b - a = 2$ и $c - a = -2$ то есть $b = a + 2$ и $c = a - 2$, то взявъ $z = \frac{p}{q}$ сіи двѣ формулы $pp + 2qq$ и $pp - 2qq$ должны бы быть квадратами слѣдов. ихъ произведение $p^2 - 4q^2$ также, но сіе равнымъ образомъ невозможно.

Положи вообще $b = a = m$ и $c = a = n$, потомъ также $x = \frac{p}{q}$, то должны формулы $pp + mqq$ и $pp - nqq$ быть квадратами; что, какъ мы уже и видѣли не возможно, ежели $m = +1$, а $n = -1$, или когда $m = +2$, а $n = -2$.

Не возможно также, когда $m = ff$, а $n = -ff$, ибо было бы тогда произведеніе $p^2 - f^2 q^2$ разность двухъ квадратовъ, которая никогда квадратомъ быть не можетъ.

Равнымъ образомъ ежели $m = 2ff$, и $n = -2ff$, то обѣ формулы $pp + 2ffqq$ и $pp - 2ffqq$ не могутъ быть квадратами; потому что ихъ произведеніе $p^2 - 4f^2 q^2$ также долженствовало бы быть квадратомъ; слѣд. положивъ $f q = r$ сія формула $p^2 - 4r^2$, чему невозможность прежде уже показана.

Когда же $m = 1$ и $n = 2$, такъ что формулы $pp + qq$ и $pp + 2qq$ квадратами быть должны, то положивъ $pp + qq = rr$ и $pp + 2qq = ss$ будемъ изъ первой $pr = rr - qq$, слѣдов. другая $rr + qq = ss$, почему какъ $rr - qq$ такъ и $rr + qq$ должны быть квадратами и ихъ

ихъ произведеіе также; однакожъ сему спастись нельзя. Отсюда довольно явствуетъ что не легко прибрать такія числа вмѣсто m и n , чтобъ рѣшеніе было возможно.

Средство угадывать, или находить вмѣсто m и n надлежащія знаменованія, есть слѣдующее.

Положивъ $ff + mgg = hb$ и $ff + ngg = kk$, изъ первой получится $m = \frac{hb - ff}{gg}$, а изъ второй $n = \frac{kk - ff}{gg}$, возьми теперь вмѣсто f, g, h и k числа по изволенію, и получатся для m и n такія знаменованія, гдѣ рѣшеніе будетъ возможно.

Пусть на прим. $b=3$, $k=5$, $f=1$ и $g=2$, то будетъ $m=2$, а $n=6$. Теперь мы увѣрены, что возможно обѣ формулы $pp + 2qq$ и $pp - 6qq$ здѣлать квадратами: сіе учинится, когда $p=11$ и $q=2$. Первая формула будетъ квадратъ, ежели $p=rr-2ss$ и $q=2rs$: ибо тогда получится $pp + 2qq = (rr-2ss)^2$,
Ю 4
другая

другая же формула $pp+6qq=r^2+2orrs+4s^2$, гдѣ известной случай, въ которомъ будетъ она квадратъ, есть когда $p=1$ и $q=2$, что учинится положивъ $r=1$ и $s=1$ или $r=s$ и формула наша выдетъ $25s^2$. Зная теперь сей случай возьмемъ $r=s+1$ и будетъ $rr=ss+2st+11$, а $r^2=s^2+4s^2t+6sst+4st^2+t^2$, почему наша формула будетъ $25s^2+44s^2t+26sst+4st^2+t^2$, коея корень пусть будетъ $5ss+fst+11$, котораго квадратъ есть $25s^2+10fst+10sst+2fst^2+t^2$, гдѣ пер-

вые и послѣдніе члены сами чрезъ себя уничтожаются. Возми теперь f такъ чтобъ и предпослѣдніе уничтожились, что здѣлается когда $4=2f$ и $f=2$, а остальные раздѣливъ на ss дадутъ уравненіе $44s+26t=10fs+10t+fst=20s+14t$, или $2s=-t$, $s=-\frac{1}{2}$ и $\frac{t}{2}=-\frac{1}{2}$, почему $s=-1$ и $t=2$, или $t=2s$, слѣдов. $r=-s$ и $rr=ss$ самой известной случай. Возми f такъ, чтобы вторые члены уничтожились; сіе здѣлается когда $44=10f$, или $f=\frac{22}{5}$, остальные же члены раздѣливъ на

они даютъ $26s + 4t = 10s + 77s + 2t$ т. е.
 $- \frac{54}{5}s = \frac{75}{5}t$, слѣдов. $t = -\frac{7}{10}s$, и такъ $r = s + t = -\frac{3}{10}s$, или $\frac{r}{s} = -\frac{3}{10}$, почему $r = 3$ и $s = 10$;
 откуда получаемъ мы , $p = 25s - 11r = 191$
 и $q = 2rs = 60$, почему формула наша $pp + 2qq = 43681 = 209^2$ и $pp + 6qq = 58081 = 241^2$.

1026.

Примѣчаніе. Такихъ чиселъ , которыя формулу нашу дѣлаютъ квадратомъ по прежнему способу найши еще и больше можно ; но надлежитъ примѣчать , что содержаніе сихъ чиселъ m и n по произволению брать можно.

Пусть будетъ сіе содержаніе какъ $a : b$ и возми $m = az$, а $n = bz$, то дѣло состоятъ только въ томъ , какимъ образомъ опредѣлимъ z , чтобъ обѣ формулы $pp + azqq$ и $pp + bzqq$ квадратами здѣлать можно было, что мы въ слѣдующемъ вопросѣ покажемъ.

1027.

Вопросъ Даны числа a и b , скажи число z , чтобъ обѣ формулы $pp + azqq$

Ю 5

$+ azqq$

$+azqq$ и $pp+bxqq$ были квадратами, и притомъ самыя меншія възмѣ знаменованія для p и q !

Положи $pp+azqq=rr$, $pp+bxqq=ss$ и помножѣ первую на b , а другую на a , по разность ихъ дасиѣ сѣ уравненіе $(b-a)pp=brr-ass$; откуда $pp=\frac{brr-ass}{b-a}$,

которая формула должна быть квадратѣ, что и учинишя положивѣ $r=s+\frac{b-a}{2}t$, а для избѣжанія дробей возьми $r=s+(b-a)t$ и

$$\text{будеши } pp=\frac{brr-ass}{b-a}=\frac{bs+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a} \\ =\frac{(b-a)ss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a}=ss+$$

$2bst+b(b-a)tt$; положивѣ $p=s+\frac{x}{y}t$ будеши $pp=ss+\frac{2x}{y}st+\frac{x^2}{y^2}tt$, гдѣ ss уничтожается,

а остальные члены раздѣливѣ на t и помноживѣ на yy даюши $2bsyy+b(b-a)tyy \\ =2sxy+txx$, откуда $t=\frac{2sxy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}$, по-

чему $t=\frac{2xy-2byy}{b(b-a)yy-xx}$, слѣдов. $t=2xy-2byy$

а $s=b(b-a)yy-xx$; пошомѣ $r=2(b-a)xy-b$

$= b(b-a)yy - xx$ и отсюда $p = s + \frac{x}{y}s = b(b-a)yy + x - 2bxy = (x-by)^2 - aby$. Нашедъ p , r и s осталось еще сыскать z ; на сей конецъ выпиши первое уравненіе $pp + azqq = rr$ изъ другаго $pp + bzqq = ss$, остатокъ будетъ $zqq(b-a) = ss - rr = (s+r)(s-r)$; но $s+r = 2(b-a)xy - 2xx$, $s-r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$; или $s+r = 2x(b-a)y - x$ и $s-r = 2by(b-a)y - (b-a)x = 2(b-a)y(by-x)$; отсюда $(b-a)zqq = (2x(b-a)y - x) \cdot (2(b-a)y(by-x))$ или $zqq = (2x(b-a)y - x)(2y(by-x)) = 4xy(b-a)y - x \cdot by - x$ слѣдов $z = \frac{4xy(b-a)y - x(by-x)}{qq}$,

почему вмѣсто qq берется самой большой квадратъ, на котораго числитель можетъ раздѣлиться, а вмѣсто p нашли уже мы $p = b(b-a)yy + x - 2bxy = (x-by)^2 - aby$, откуда видно, что сѣ формулы будутъ простѣе когда возмемъ $x-by = v$, или $x = v + by$ и будетъ $p = vv - aby$, а

$$z = \frac{4(v+by)y(v)(v+ay)}{qq} = \frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq}, \text{ гдѣ числа } v \text{ и } y \text{ по}$$

изволенію взять можно и найдется сперва qq , когда вмѣсто его большой квадратъ возьмется, которой содержи́ся въ числительѣ, а отсюда же найдется z , потомъ $m = az$, $n = bz$, и на концѣ $p = uv - aby$; а отсюда получаются искомыя формулы.

- I. $pp + azqq = (uv - aby)^2 + 4avy(u + ay)(v + by)$ квадратъ, коего корень если $r = -uv - 2avy - aby$, а другая формула $pp + bzqq = (uv - aby)^2 + 4bvy(u + ay)(v + by)$ которая также квадратъ, коего корень $s = -uv - 2bvy - aby$, гдѣ знаменованія чиселъ r и s положительныя также быть могутъ. Сіе потребно изъяснить нѣкоторыми примѣрами.

1028.

Примѣръ. Пусть буди́тъ $a = -1$ и $b = +1$; найди́ такія числа вмѣсто z , чтобъ сіи 2 формулы $pp - zqq$ и $pp + zqq$ могли быть квадратами, а именно первая $= rr$; а другая $= ss$?

Здѣсь

Здѣсь будемъ $p = rr + yy$, а чтобъ
найти z , то надлежитъ разсмотрѣть
формулу $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$ и взять
вмѣсто v и y слѣдующія числа;

$v = 2$	3	4	5	16	8
$y = 1$	2	1	4	9	1
$v-y = 1$	1	3	1	7	7
$v+y = 3$	5	5	9	25	9
$zqq = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3$	120	16 \cdot 15	9 \cdot 16 \cdot 5	36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 7	16 \cdot 9 \cdot 14
$qq = 4$	4	16	9 \cdot 16	36 \cdot 25 \cdot 16	16 \cdot 9
$z = 6$	30	15	5	7	14
$p = 5$	13	17	41	337	65

откуда имѣемъ мы слѣдующія вмѣсто z
знаменованія

I	II	III	IV	V	VI	
6	30	15	5	7	14	почему слѣдующіе форму- лы могутъ разрѣшиться.

I. формулы $pr - 6qq$ и $pr + 6qq$ могутъ
быть квадратами, когда $p = 5$ и $q = 2$;
ибо первая будетъ $25 - 24 = 1$, а дру-
гая $= 25 + 24 = 49$.

II. Также сѣи двѣ $pp-30qq$ и $pp+30qq$ будутъ квадратами, когда $p=13$ и $q=2$; ибо первая $=169-120=49$, а другая $=169+120=289=17^2$.

III. Слѣдующіе двѣ формулы $pp-15qq$ и $pp+15qq$ будутъ также квадратами, ежели $p=17$ и $q=4$; первая будетъ $=289-240=49$, а другая $=529=23^2$.

IV. Квадратами также могутъ быть сѣи двѣ формулы $pp-5qq$ и $pp+5qq$, что учинится, когда $p=41$ и $q=12$; первая будетъ $=1681-720=961=31^2$, а другая $2401=49^2$.

V. Наконецъ формулы $pp-7qq$ и $pp+7qq$ будутъ квадратами, полагая $p=337$, а $q=120$; первая выйдетъ $=113569-100800=12769=113^2$, а другая $=113569+100800=214369=463^2$.

1029.

Примѣръ. Когда оба числа m и n содержатся между собою какъ $1:2$; т. е. когда $a=1$ и $b=2$, слѣдов. $m=2$ и $n=2z$,
надѣ

надлежитъ сыскать знаменованіе вмѣ-
сто z , чтобъ сіи двѣ формулы $pp+2qq$
и $pp+2zqq$ были квадратами? Къ
сему всеобщей формулы употреблять
не нужно; но заравъ сей примѣръ съ
прежнимъ снеспи можно; ибо поло-
живъ $pp+2qq=rr$ и $pp+2zqq=ss$, най-
демся изъ первой $pp=rr-2qq$, которую
величину вмѣсто pp поставивъ во вто-
рой будемъ $rr+2qq=ss$; то сіи фор-
мулы $rr-2qq$ и $rr+2qq$ сдѣлать можно
квадратами, и есть случай прежняго
примѣра; по чему слѣдующія будутъ
вдѣсь вмѣсто z знаменованіи: 6, 30, 15,
5, 7, 14, и проч.

Такое превращеніе и вообще сдѣ-
лать можно зная что 2 формулы $pp+mq$
и $pp+nqq$ квадратами быть могутъ. Взявъ
 $pp+mq=rr$ и $pp+nqq=ss$ первая дастъ
 $pp=rr-mq$, слѣдов. вторая $rr-mq+nqq=ss$
или $rr+(n-m)qq=ss$; слѣдовъ когда первая
возможна, то и сіи формулы $rr-mq$ и
 $rr+(n-m)qq$ также возможны; но понеже
 m и n можно намъ пересѣпавить, то и

сіи возможны $rr \sim nqq$ и $rr \vdash (m-n)qq$. Если же прежнія формулы не возможны, то и сіи такожде.

1030.

Примѣръ Пусть будутъ числа m и n какъ $1 : 3$, или $a=1$, $b=3$; слѣдов. $m=z$ а $n=3z$, такъ что сіи формулы $rr+zqq$ и $rr \vdash 3zqq$ должны быть квадратами.

Понеже здѣсь $a=1$, $b=3$, то за- всегда дѣло будетъ возможное, когда только $zqq=4vu(v+y)(v+3y)$ и $r=vv-3yy$, чего ради возми здѣсь v и y слѣдующія знаменованія.

$v=1$	3 -	4 -	1 - -	16 - - -
$y=1$	2 -	1 -	8 - -	9 - - -
$v+y=2$	5 -	5 -	9 - -	25 - - -
$v+3y=4$	9 -	7 -	25 - -	43 - - -
$zqq=4 \cdot 8$	$9 \cdot 4 \cdot 30$	$4 \cdot 4 \cdot 35$	$4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 2$	$4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 43$
$qq=4 \cdot 4$	$4 \cdot 9$	$4 \cdot 4$	$4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 25$	$4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25$
$z=2$	30	35	2 - - -	43 - - - -
$r=2$	3	13	191 - -	13 - - - -

Здѣсь

здѣсь имѣемъ мы 2 случая для $z=2$, почему двойкимъ образомъ формулы $pp+2qq$ и $pp+6qq$ квадратами здѣлать можемъ. Во первыхъ учинится сие, когда $p=2$ и $q=4$, слѣдов. также, когда $p=1$, $q=2$, и найдемся $pp+2qq=9$, а $pp+6qq=25$.

Понюмъ бываетъ также сие, когда $p=191$ и $q=60$: ибо тогда получится $pp+2qq=(209)^2$ и $pp+6qq=(241)^2$. Но не можешъ ли также быть $z=1$? Сие бы здѣлалось естлибъ вмѣсто zqq вышелъ квадратъ, что разрѣшить трудно. Естли же бы захошѣли разрѣшить сей вопросъ, могутъ ли двѣ формулы $zz+qq$ и $zz+3qq$ быть квадратами, или нѣшѣ, то слѣдующимъ образомъ рѣшеніе разположить можно.

1031.

Надлежитъ разыскать, могутъ ли формулы $pp+qq$ и $pp+3qq$ быть квадратами, или нѣшѣ. Положивъ $pp+qq=rr$, $pp+3qq=ss$ надлежитъ примѣчать слѣдующее.

Тамъ II.

Я

I

- I. Числа p и q можно взять недѣлимыми между собою : ибо если бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы формулы оспались еще квадратами, ежели бы p и q на онаго раздѣлились.
- II. p четное число быть не можетъ : потому что q было бы нечетное и слѣдов. вторая формула была бы число сего рода $4n+3$, которое квадратомъ быть не можетъ. Почему p неопредѣленно нечетно, а pp число сего рода $8n+1$.
- III. Когда p нечетно, то изъ первой формулы q не только четно, но еще и на 4 дѣлимо, дабы qq было число сего рода $16n$, а $pp+qq$ сего рода $8n+1$.
- IV. Также p на 3 не можетъ быть дѣлимо : ибо pp могло бы на 9 раздѣлиться, а qq нѣтъ; слѣдов. $3qq$ только на 3, а не на 9; и такъ $pp+3qq$ только на 3, а не на 9, и для того квадратомъ быть не можетъ. По сему

сему число p на 3 недѣлимо, а pp будетъ сего роду $3n+1$.

V. Когда p на 3 недѣлимо, то должно q дѣлиться на 3: ибо если бы q на 3 было недѣлимо, то было бы qq число сего рода $3n+1$, и по сему $pp+qq$ сего $3n+2$, которое квадратомъ быть не можетъ; слѣд. q должно на 3 дѣлиться.

VI. Также же p на 5 недѣлимо быть можетъ: ибо ежели бы сѣе такъ было, то бы q на 5 не дѣлилось, и qq число сего рода $5n+1$, или $5n+4$; слѣд. $3qq$ число сего рода $5n+3$ или $5n+2$, котораго рода было бы также $pp+3qq$, и слѣд. не могло бы быть квадратомъ, почему p неотмѣнно должно быть на 5 недѣлимо, а pp число сего рода $5n+1$, или $5n+4$.

VII. Ежели p на 5 недѣлимо, то посмотримъ, можетъ ли q раздѣлиться на 5, или нѣтъ. Если бы q на 5 не дѣлилось, то бы qq было сего роду $5n+2$, или $5n+3$, какъ уже мы видѣли, и было бы тогда pp или, $5n$

$+1$, или $5n+4$, а $pp+3qq$, или $5n+1$, или $5n+4$, такъ какъ и pp . Пусть будетъ $pp=5n+1$, то надлежало бы быть $qq=5n+5$: ибо иначе $pp+qq$ не могло бы быть квадратомъ; но вышло бы $3qq=5n+2$. и $pp+3qq=5n+3$, которое квадратомъ быть не можетъ. Когда же $pp=5n+4$, то должно бы $qq=5n+1$, и $3qq=5n+3$; слѣдов. $pp+3qq=5n+2$, что также квадратомъ не будетъ. Отсюда слѣдуетъ, что qq должно дѣлиться на 5.

VIII. Когда q на 4, потомъ на 3 и наконецъ на 5 дѣлиться должно, то надлежитъ быть число $4.3.5n$ или $q=60n$; по чему наша формула будетъ $pp+3600nt=rr$, и $pp+10800nt=ss$. Вычти первую изъ второй, и будетъ $7200nt=ss-rr=(s+r)(s-r)$, такъ что $s+r$ и $s-r$ должны быть множители числа $7200nt$. При чемъ надлежитъ примѣчать, что какъ s такъ и r должны быть нечетныя числа, и при томъ между собою недѣлимы.

IX. По сему пусть будетъ $7200m = 4fg$,
 коего множители $2f$ и $2g$ взявъ $5 + r = 2f$,
 а $r = 2g$ будетъ $s = f + g$, $r = f - g$, гдѣ
 f и g должны быть между собою не-
 дѣлимы, одно четъ, а другое не-
 четъ; но понеже $fg = 1800m$, то
 $1800m$ надлежитъ раздробить на 2
 множителя, изъ коихъ бы одинъ былъ
 четной, а другой нечетъ, и при томъ
 не имѣли бы общаго дѣлителя.

X. Надлежитъ еще примѣчать, что
 ежели $rr = pp + qq$, и слѣдственно r дѣ-
 литель числа $pp + qq$, то число $r = f - g$
 также должно быть суммою двухъ
 квадратовъ; а понеже оно нечетъ,
 то въ формулѣ $4n + 1$ содержаться
 долженствуетъ.

XI. Взявъ $n = 1$ будетъ $fg = 1800 = 8 \cdot 9 \cdot 25$,
 откуда слѣдующія раздробленія выхо-
 дятъ: $f = 1800$ и $g = 1$, или $f = 200$, и
 $g = 9$, или $f = 72$, а $g = 25$, или $f = 225$,
 а $g = 8$. по первому будетъ $r = f - g = 1799$
 $= 4n + 3$; по второму $r = f - g = 191 = 4n + 3$;
 по третьему $r = f - g = 47 = 4n + 3$, и на-
 конецъ по четвертому $r = f - g = 217 = 4n + 1$.

По чему 3 первые не годятся, а остаются только четвертое раздробленіе; откуда вообще заключить можно, что самой большей множитель нечетной, а меньшей четной быть должны. Но здѣсь также знаменованіе $r=217$ имѣть мѣста не можетъ, потому что сіе число на 7 дѣлится, которое не сумма двухъ квадратовъ.

XII. Положивъ $n=2$ будемъ $fg=7200=32.225$; взявъ $f=225$ и $g=32$, такъ что $r=f-g=193$, которое число есть сумма двухъ квадратовъ и достойно, чтобъ съ нимъ пробу здѣлать. Когда $q=120$ и $r=193$, то $pp=rr-qq=(r+q)(r-q)$, но $r+q=313$ и $r-q=73$, то явствуетъ, что вмѣсто pp квадрата не выйдетъ, потому что оба множители не квадраты.

Еслили бы кто похотѣлъ взять на себя сей трудъ и брать вмѣсто n другія числа, то весь бы трудъ былъ тщетной; что мы показать намѣрены.

1032.

Теорема. Не возможно, чтобъ двѣ формулы $pp+qq$ и $pp+3qq$ были вдругъ квадратами; или въ такихъ случаяхъ, когда одна будетъ квадратъ, то другая заподлинно не квадратъ; что доказы-ваемъ мы такимъ образомъ.

Когда p нечетъ, а q четъ, какъ мы видѣли, то $pp+qq$ не иначе квадра-томъ быть можетъ, какъ только если $q=2rs$ и $p=rr-ss$; другая же $pp+3qq$ иначе квадратомъ не будетъ, какъ толь-ко если $q=2tu$, а $p=tt-3uu$, или $3uu-tt$. Понеже въ обоихъ случаяхъ q должно быть удвоенное произведеніе, то положи вмѣсто обоихъ $q=2abcd$, и возми для перваго $t=ab$ и $s=cd$, а для другаго $t=ac$ и $u=bd$. Въ первомъ случаѣ бу-детъ $p=aabb-ccdd$; а въ другомъ $p=aa-cc-3bbdd$, или также $3bbdd-aacc$, кото-рыя оба значенія одинаковы быть должны. И такъ получимъ мы, или $aabb-ccdd=aacc-3bbdd$, или $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$; при чемъ должно знать,

что числа a , b , c и d вообще меньше нежели p и q ; по чему надлежитъ намъ разсмотрѣть каждой изъ сихъ двухъ случаевъ особенно. Изъ перваго получимъ мы $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$, или $bb(aa + 3dd) = cc(aa + dd)$, откуда $\frac{bb}{cc} = \frac{aa + dd}{aa + 3dd}$, которая дробь должна быть квадратъ; но понеже здѣсь числитель и знаменатель инаго общаго дѣлителя кромѣ 2-хъ имѣть не могутъ, потому что разность оныхъ есть $2dd$, и такъ ежели бы 2 было общимъ дѣлителемъ, то надлежало бы какъ $\frac{aa + dd}{2}$, такъ и $\frac{aa + 3dd}{2}$ быть квадратами; но оба числа a и d въ семъ случаѣ нечетныя; слѣдов. ихъ квадраты надлежатъ до формулы $8n + 1$, почему послѣдняя формула $\frac{aa + dd}{2}$ получитъ сей видъ $4n + 2$, которой квадратомъ быть не можетъ: по чему 2 общимъ дѣлителемъ быть не можетъ; но числитель $aa + dd$, и знаменатель $aa + 3dd$ между собою недѣлимы, слѣдов. каждой долженъ быть квадратомъ: потому что сіи формулы съ первыми сходны. Откуда

куда слѣдуетъ , что ежели бы первые были квадратами, то бы и въ меньшихъ числахъ такіе формулы квадратами были, и такимъ бы образомъ можно было прип. ти къ меньшимъ числамъ; но когда такихъ формулъ въ малыхъ числахъ нѣтъ, то и въ большихъ также не будетъ. Сіе слѣдствіе столь же справедливо, какъ и прежней второй случай $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$ ведетъ къ тому же. Но отсюда $aabb + aacc = 3bbdd + ccdd$, или $aa(bb + cc) = dd(3bb + cc)$, почему $\frac{aa}{dd} = \frac{bb + cc}{3bb + cc} = \frac{cc + bb}{cc + 3bb}$, которая дробь должна быть квадратъ; и симъ прежне доказательство подкрѣпляется: ибо если бы были такіе случаи въ большихъ числахъ, гдѣ $pp + qq$, и $pp + 3qq$ квадраты , то бы также и въ малыхъ числахъ оныя быть должныствовали , однакожъ невозможны.

1033.

Вопросъ. Найти 3 такія числа x , y и z , изъ которыхъ ежели 2 между собою

А 5

помно-

помножася и къ произведенію при-
дася 1, чтобъ вышли квадраты?

По чему сіи 3 формулы I) $xz+1$,
II) $xz+1$, III) $yz+1$ должны быть квад-
ратами.

Возьми для двухъ послѣднихъ $xz+1$
 $=pp$, $yz+1=qq$, и найдется $x=\frac{pp-1}{z}$,
а $y=\frac{qq-1}{z}$; почему первая формула бу-
детъ $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, которая должна
быть квадратъ и слѣдственно умножен-
ная на zz , т. е. сія $(pp-1)(qq-1)+zz$, ко-
пюрую легко квадратомъ здѣлать можно:
ибо положивъ корень ся $=z+r$ полу-
чится $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, откуда
 $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, гдѣ вмѣсто p , q и r
можно брать числа по изволенію.

Положивъ напр. $r=-pq-1$ будетъ
 $rr=ppqq+2pq+1$, и $z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}$

pp

$$\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2}, \text{ слѣдов. } x = \frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq}$$

$$= \frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2} \text{ и } y = \frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}.$$

Если пожелаешь имѣть цѣлыя числа, то положи первую формулу $xu+1=pp$, и возьми $z=x+y+q$, будетъ 2-ая формула $xx+xy+xq+1=xx+xy+pp$, а третья $xu+yu+qu+1=yu+qu+pp$, кои очевидно будутъ квадратами, когда возмется $q=\pm 2p$: ибо тогда вторая будетъ $xx\pm 2px+pp$, кою корень есть $x\pm p$; третья же будетъ $yu\pm 2py+pp$, кою корень $y\pm p$. Почему имѣемъ мы сіе изрядное рѣшеніе: $xu+1=pp$, или $xu=pp-1$, что для каждаго числа, которое за p берется, легко здѣлаться можетъ; потомъ и третье число есть двояко, или $z=x+y+2p$, или $z=x+y-2p$, что мы слѣдующими примѣрами изъяснить намѣрены.

1. Взявъ $p=3$ будетъ $pp-1=8$; теперь положи $x=2$, $y=4$ и получимся z ,
или

или $=12$, или $z=0$, слѣдов. 3 иско-
мые числа суть 2, 4 и 12.

II. Пусть $p=4$ будетъ $pp-1=15$; взявъ
 $x=3$ и $y=5$ будетъ $z=16$, или
 $z=0$; почему 3 искомыя числа суть
3, 5 и 16.

III. Пусть $p=5$ будетъ $pp-1=24$ и
положимъ $x=3, y=8$ найдемъ $z=21$,
или также $z=1$, откуда слѣдующія
выходятъ числа 1, 3 и 8; или 3, 8
и 21.

1034.

Вопросъ. Сыскать 3 такія цѣлыя числа
 x, y и z , что ежели къ произведенію
изъ каждаго двухъ придася данное
число a , то и произойдетъ квадратъ?

Слѣдов. сіи 3 формулы должны
быть квадратами: I) x^2+y^2+a , II) x^2+z^2+a ,
III) y^2+z^2+a . Пославъ за первую $x^2+y^2+a=pp$,
и возмемъ $z=x+y+q$, то вторая $x^2+x^2+y^2+xq+a=x^2+xq+pp$; а третья $x^2+y^2+y^2+yq+a=y^2+yq+pp$, кои обѣ бу-
дутъ квадратами, когда $q=\pm 2p$ такъ,
что

что $z = x + y + 2p$, и отсюда двѣ величины для z найтись можно.

1035.

Вопросъ. Требуется 4 цѣлыя числа x, y, z и v , такъ что если къ произведенію изъ каждаго двухъ придастся данное число a , то бы каждой разъ вышелъ квадратъ?

По сему слѣдующія 6 формулъ надлежитъ здѣлать квадратами : I) $xy + a$; II) $xz + a$; III) $yz + a$; IV) $xv + a$; V) $yv + a$, VI) $zv + a$. Пославъ за первую $xy + a = pp$, и возми $z = x + y + 2p$, то будетъ 2-рая и 3-ья формула квадратами. Потомъ возми $v = x + y - 2p$ будетъ 4-тая и 5-тая формула квадратами, слѣдоват. осталась только 6-тая, которая будетъ $xx + 2xy + yy - 4pp + a$, и которая также должна быть квадратомъ. Понеже $pp = xy + a$, то будетъ послѣдняя формула $xx + 2xy + yy - 3a$. И такъ сии двѣ формулы квадратами еще здѣлать надлежитъ : I) $xy + a = pp$; II) $(x - y)^2 - 3a$: корень послѣдней пусть будетъ $(x - y)$

$-q$, и получится $(x-y)^2 - 3a = (x-y)^2 - 2q(x-y) + qq$ откуда $-3a = -2q(x-y) + qq$; по-

томъ $x-y = \frac{qq+3a}{2q}$, или $x=y + \frac{qq+3a}{2q}$,

слѣдов. $pr = y + \frac{qq+3a}{2q}y + a$. Возми $p=y$

$+r$, и будстѣ $2ry + rr = \frac{qq+3a}{2q}y + a$, или

$4qrr + 2qrr = (qq+3a)y + 2aq$, или $2qrr - 2aq = (qq+3a)y - 4qry$, и $y = \frac{2qrr - 2aq}{qq+3a-4qr}$, гдѣ q

и r по изволенью взять можно, и дѣло со-
стоитъ только въ томъ, чтобъ вмѣ-
сто x и y цѣлыя вышли числа. Когда
 $p=y+r$, то z и r будутъ также цѣ-
лыя, и главное дѣло зависить здѣсь отъ
свойства даннаго числа a , гдѣ затруд-
неніе для цѣлыхъ чиселъ быть можетъ;
но надлежитъ примѣчать, что сіе рѣ-
шеніе чрезъ то весьма ограничено: ибо
когда буквамъ x и y знаменованія даны
 $x+y = \pm 2p$, хотя бы они и могли имѣть
другія знаменованія. На сей конецъ
хотимъ мы надъ симъ вопросомъ учи-
нить слѣдующее разсужденіе, которое

и въ другихъ случаяхъ свою пользу имѣть можешъ.

I. Если $xu + a$ должно быть квадратъ, и слѣд. $xu = rr - a$, то числа x и y за- всегда въ подобной формулѣ $rr - ass$ содержатся; и такъ положивъ $x = bb - ass$ и $y = dd - aee$ будетъ $xu = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Еслили имперъ $be - cd = \pm 1$, то $xu = (bd - ace)^2$; по чему $xu + a = (bd - ace)^2$

II. Положимъ еще $x = ff - agg$, и возьмемъ числа f и g шакого состоянія, чтобъ $bg - cf = \pm 1$, также $dg - ef = \pm 1$, то формулы $xz + a$ и $yz + a$ будутъ квадратами, и дѣло состоитъ въ нахожденіи такихъ вѣсто b и c , d и e также f и g чиселъ, чтобъ предписанное свойство исполнилось.

III. Си 3 пары буквъ хотимъ мы представить дробями яко $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ и $\frac{f}{g}$, которые шакого свойства быть должны, чтобъ разность между каждою парю изъявить можно было одною дробью, коей числитель 1: ибо
когда

когда $\frac{b}{e} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{e^2}$, гдѣ числитель, какъ мы видѣли, долженъ быть ± 1 . Здѣсь можно взять одну изъ сихъ дробей по изволенію, а къ ней легко найсти другую, которая бы помянутое свойство имѣла. Пусть будетъ на прим. первая $\frac{b}{e} = \frac{3}{2}$, то другая $\frac{d}{e}$ сей почти должна быть равна; пусть $\frac{d}{e} = \frac{2}{2}$, то разность будетъ $= \frac{1}{2}$. Сію вторую дробь можно также вообще опредѣлить изъ первой; ибо когда $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, то надлежитъ быть $3e - 2d = 1$, слѣдов: $2d = 3e - 1$ и $d = e + \frac{e-1}{2}$, чего ради возми $\frac{e-1}{2} = m$, или $e = 2m + 1$ и получится $d = 3m + 1$, а наша вторая дробь будетъ $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Равнымъ образомъ къ каждой первой дроби можно сыскать другую, чему слѣдующіе прилагаемъ примѣры:

$$\frac{b}{e} = \frac{3}{2}$$

и получ. $xy + a = 1225$ $840a + 144aa = (35 - 12a)^2$
 потомъ $xz + a = 3600 - 2520a + 441aa = (60 - 21a)^2$
 и $yz + a = 7056 - 4704a + 784aa = (84 - 28a)^2$.

1036.

Когда же по силѣ вопроса надлежитъ найти 4 такія числа x, y, z и v , то должно къ первымъ тремъ дробямъ присовокупить еще четвертую, и по сему пусть будутъ 3 первые $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$; возьми четвертую дробь $\frac{b}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+e}$ такъ чтобъ она со второю и третьею въ надлежащемъ была содержаніи. Если теперь возмешь $x = bb - acc$, $y = dd - aee$, $z = ff - agg$ и $v = bb - akk$, то слѣдующіе обстоятельства исполнятся: I) $xy + a = \square$, II) $xz + a = \square$; III) $yz + a = \square$, IV) $yv + a = \square$; V) $zv + a = \square$, и такъ осталось еще, чтобъ $xv + a$ было также квадратное число, которое само собою не сдѣлается, потому что первая дробь съ четвертою не стоявъ въ надлежащемъ содержаніи и для того въ первыхъ трехъ дробяхъ

дробяхъ надлежитъ удержать неопредѣ-
ленное число m , и оное опредѣлить
такъ, чтобы $xv + a$ было также квадратъ.

VI. Взявъ изъ прежней таблички первой

случай положи $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$ и

будетъ $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$, а $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$,

отсюда $x = 9 - 4a$ и $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$
сѣдов. $xv + a = 9(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2$
 $+ 4aa(4m+4)^2$; $- 4a(6m+5)^2$
 $+ a$

или $xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288mm + 528m$
 $+ 243) + 4aa(4m+4)^2$, что легко квадра-
томъ сдѣлать можно: потому что mm
помноженъ на квадратъ, но мы при-
емъ медлить не будемъ.

VII. Можно также сіи дроби, какіе здѣсь
попрѣбны, изъяснить вообще. Пусть

будетъ $\frac{b}{c} = \frac{1}{n}$, $\frac{d}{e} = \frac{nI-1}{n}$, по $\frac{f}{g} =$

$\frac{nI+I-1}{n+1}$ и $\frac{h}{k} = \frac{2nI+I-2}{2n+1}$; поставь

въ послѣдней вмѣсто $2n+1 = m$, бу-

дети она $\frac{Im-2}{m}$, а изъ первой $x = II - a$, изъ послѣдней $v = Im - 2 - am$ и осталось только чтобы $2v + a$ квадратомъ было. Понеже $v = (II - a)mm - 4Im + 4$, слѣдов $2v + a = (II - a)^2 mm - 4(II - a)Im + 4II - 3a$, что должно быть квадратомъ, коего корень положи $(II - a)m - p$; сего квадратъ $(II - a)^2 mm - 2(II - a)mp + pp$, откуда получаемъ мы $-4(II - a)Im + 4II - 3a = -2(II - a)mp + pp$ и $m = \frac{pp - 4II + 3a}{(II - a)(2p - 4I)}$; взявъ $p = 2I + q$ будетъ $m = \frac{4Iq - qq + 3a}{2q(II - a)}$, гдѣ вмѣсто I и q произволящія брать можно числа.

Если бы наприм. было $a = 1$, то возьми $I = 2$, и будетъ $m = \frac{4q - qq + 3}{6q}$, положивъ $q = 1$ получится $m = \frac{2}{3}$; и $m = 2n + 1$; но здѣсь мы медлить не будемъ, а приступимъ къ слѣдующему вопросу.

1037.

Вопросъ. Требуется ли такія 3 числа x, y и z , чтобы какъ сумма, такъ и разность каждаго двухъ была квадратъ?

По сему слѣдующія 6 формулъ должны быть квадратами: I) $x+y$; II) $x+z$; III) $y+z$; IV) $x-y$; V) $x-z$; VI) $y-z$.

Начни съ послѣднихъ трехъ и положи $x-y=pp$, $x-z=qq$ и $y-z=rr$, то изъ послѣднихъ двухъ получимъ $x=qq+z$, а $y=rr+z$, откуда $x-y=qq-rr=pp$, или $qq=pp+rr$, такъ что сумма квадратовъ $pp+rr$ должна быть квадратъ, а именно qq ; что учинится взявъ $p=2ab$ и $r=aa-bb$: ибо тогда $q=aa+bb$, но мы здѣсь оставимъ буквы p, q и r , и рассмотримъ три первыя формулы найдемъ во первыхъ $x+y=qq+rr+2z$; во вторыхъ $x+z=qq+2z$; въ третьихъ $y+z=rr+2z$. Положи за первую $qq+rr+2z=ii$, то $2z=ii-qq-rr$; потомъ сія двѣ формулы квадратами дѣлашь надлежитъ: $ii-rr=\square$ и $ii-qq=\square$, т. е. $ii-(aa+bb)^2=\square$ и $ii-(aa-bb)^2=\square$, которые получаешь таковой видъ $ii-a^2-b^2-2aabb$ и $ii-a^2-b^2+2aabb$;

но понеже какъ $cc + dd + 2cd$, такъ и $cc + dd - 2cd$ суть квадраты, то видно, что наше намѣреніе исполнится, когда мы $u - a^2 - b^2$ съ $cc + dd$ и $2aabb$ съ $2cd$ уравнимъ; а для произведенія сего въ дѣйство положимъ $cd = aabb = ffgglbkk$ и возьмемъ $c = ffgg$, $d = bkkk$, $aa = ffbh$ и $bb = ggkk$, или $a = fh$ и $b = gk$, по чему первое уравненіе $u - a^2 - b^2 = cc + dd$ получимъ такой видъ $u - f^2h^2 - g^2k^2 = f^2g^2 + b^2k^2$, слѣдов. $u = f^2g^2 + f^2h^2 + b^2k^2 + g^2k^2$, т. е. $u = (f^2 + k^2)(g^2 + h^2)$. Сіе произведеніе должно быть квадратъ, которой раздѣлить трудно: для того возьмемъ другой способъ и изъ трехъ первыхъ уравненій $x - y = pp$, $x - z = qq$ и $y - z = rr$ опредѣлимъ y и z , которыя будучи $y = x - pp$, а $z = x - qq$, такъ что $qq = pp + rr$. Первые формулы выдутъ $x + y = 2x - pp$, $x + z = 2x - qq$ и $y + z = 2x - pp - qq$. вмѣсто сей послѣдней положи $2x - pp - qq = u$, такъ что $2x = u + pp + qq$, и останется только формулы $u + qq$ и $u + pp$ сдѣлать квадратами. Но должно быть $qq = pp + rr$, то возми

$q = aa$

$q = aa + bb$ и $p = aa - bb$, будемъ $r = 2ab$; по чему наши формулы будутъ

$$I) \quad ii + (aa + bb)^2 = ii + a^* + b^* + 2aabb = 0$$

$$II) \quad ii + (aa - bb)^2 = ii + a^* + b^* - 2aabb = 0.$$

Уравнимъ теперь опять $ii + a^* + b^*$ съ $cc + dd$ и $2aabb$ съ $2cd$, то намѣреніе наше исполнится. Положивъ какъ и прежде $c = fg$, $d = hkk$, $a = fh$ и $b = gk$ будемъ $cd = ahbb$ и надлежитъ еще быть $ii + f^*h^* + g^*k^* = cc + dd = f^*g^* + h^*k^*$; отсюда слѣдуетъ $ii = f^*g^* - f^*h^* + h^*k^* - g^*k^* = (f^* - k^*)(g^* - h^*)$, и все дѣло состояло въ нахожденіи двухъ такихъ разностей между двумя биквадратами, какъ $f^* - k^*$ и $g^* - h^*$, которые бы помноживъ одну на другую произвели квадратъ.

На сей конецъ рассмотримъ формулу $m^* - n^*$ и поглядимъ какія отсюда выдутъ числа, если вмѣсто m и n возьмутся данныя числа, и сверхъ сего особливо примемъ въ разсужденіе квадраты въ нихъ содержащіеся. Понеже $m^* - n^* = (mm - nn)(mm + nn)$, то сдѣлаемъ отсюда слѣдующую таблицу.

Таблица

$m+n=4$	9	9	16	16	25	25	49	49
$m=1$	1	4	7	9	1	9	1	16
$m+n=5$	9	5	15	7	24	16	40	36
$m+n=5$	10	13	17	25	26	217	30	61
$m+n=5$	0,10 МАН	15,8 МАН	3,507 МАН	25,9	0,3, 4, 3 МАН	16,007 МАН	36,007, 25 МАН	301, 0, 5, 1, 3
$m+n=5$	16,5	3,5017	16,013	16,013	16,013	16,013	16,013	16,013
$m+n=6$	81	121	121	121	144	109	169	225
$m+n=6$	49	4	9	9	25	1	41	64
$m+n=6$	53	9,18	16,87	16,87	8,0	7,17	8,3, 7	8,71
$m+n=6$	30,3	2,5, 7, 3	2,5, 12	2,5, 12	2,5, 17	16,9	1,5, 17	2,5, 1, 5
$m+n=6$	44,5, 1, 3	9, 2, 5, 6, 1, 3	16, 0, 7, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3
$m+n=6$	44,5, 1, 3	9, 2, 5, 6, 1, 3	16, 0, 7, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3	16, 0, 9, 5, 0, 1, 3

Изъ сего уже можемъ мы дать нѣко-
 рыхъ рѣшеній, а именно: взявъ $ff=9$ и
 $kk=4$ будемъ $f^2-k^2=13.5$; потомъ $gg=81$
 и $bb=49$, получимся $g^2-b^2=64.5.13$, откуда
 $u=64.25.169$, слѣдов. $v=520$; но когда
 $u=270400$, $f=3$, $g=9$, $k=2$ и $b=7$, то
 получимся $a=21$ и $b=18$; откуда $p=117$,
 $q=765$ и $r=756$; а изъ сего найдется
 $2x=11$, $pp+qq=869314$, слѣдов. $x=434657$,
 потомъ $y=x-pr=420968$, и наконецъ
 $z=x-qq=-150568$, которое число можно
 взять положительнымъ: потому что
 сумма въ разность обратно перемѣни-
 лась; и такъ наши искомыя числа суть
 слѣдующія:

$$x = 434657$$

$$y = 420968$$

$$z = 150568$$

$$\text{чего ради } x + y = 855625 = (925)^2$$

$$x + z = 585225 = (765)^2$$

$$y + z = 571536 = (756)^2$$

$$\text{потомъ } x - y = 13689 = (117)^2$$

$$x - z = 284089 = (533)^2$$

$$y - z = 270400 = (520)^2$$

Другія еще числа найтти можно изъ прежней таблички. Такъ когда положимъ $ff = 9$, $kk = 4$, $gg = 121$ и $hb = 4$, то будемъ $ii = 13$ $5 \cdot 5 \cdot 13$ $9 \cdot 25 = 9 \cdot 25$ $25 \cdot 169$, такъ что $i = 3 \cdot 5$ $5 \cdot 13 = 975$; а потомъ $f = 3$ $g = 11$ $k = 2$ и $b = 2$, то найдемъ $a = fb = 6$ и $b = gk = 22$; отсюда $p = aa - bb = -448$ и $q = aa + bb = 520$, а $r = 264$. Чего ради получимъ $2x = ii + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729$, слѣдоват. $x = \frac{1421729}{2}$ отсюда $y = x - pp = \frac{1070311}{2}$ и $z = x - qq = 880929$. Теперь надлежитъ примѣчать, что если сіи числа желаемое свойство имѣютъ, то оныя будучи помножены на каждой квад-

квадратъ, должны удержатъ сіе свойство; и такъ взявъ найденныя числа четырежды, слѣдующія 3 числа удовлетворяютъ : $x=2843458$; $y=2040642$ и $z=1761858$, кои больше нежели предъидущія , такъ что тѣ за самыя меньшія возможные почесья могутъ.

1038.

Вопросъ. Требуются 3 квадратныя числа, чѣмъ разность между двумя каждами была квадратъ ? Прежнее рѣшеніе служило также и къ сему вопросу ; ибо когда x , y и z такія суть числа , что сии формулы будутъ квадратами : I) $x+y$; II) $x-y$; III) $x+z$; IV) $x-z$; V) $y+z$; VI) $y-z$; то произведеніе изъ первой и второй $xx-yy$ также квадратъ. Равнымъ образомъ произведеніе изъ третьей и четвертой $xx-zz$, и наконецъ изъ пятой и шестой $yy-zz$ будутъ также квадратами слѣдов. 3 искомыя здѣсь квадрата будутъ xx , yy и zz ; но понеже сіи числа будутъ очень велики , то безъ сомнѣнія также есть гораздо меньшія : потому что для сдѣланія $xx-yy$ квадратомъ не нужно, чѣмъ

чтобъ $x+y$ и $x-y$ каждое особливо было квадратъ, затѣмъ чино $25-9$ есть квадратъ хотя $5+3$, нисе $5-3$ не квадраты. Сего ради хотимъ мы рѣшивъ сей вопросъ особливо, и притомъ во первыхъ примѣчать, что вмѣстѣ одного квадрата можно взять 1 цу. Когда $xx-yy$, $xx-zz$ и $yy-zz$ квадраты, то будущи они также квадратами ежели на zz раздѣляясь; и по сему надлежитъ сдѣлать квадратами

си формулы: $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \square$; $\frac{xx}{zz} - 1 = \square$ и $\frac{yy}{zz} - 1 = \square$. Все дѣло соспоитъ въ сихъ двухъ

дробяхъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$; взявъ $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}$ и $y = \frac{qq+1}{qq-1}$,

послѣднія два обстоятельство исполняюща и будетъ $\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$, а $\frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}$.

Теперь осталось только первую формулу сдѣлать квадратомъ, которая есть $\frac{xx}{zz}$

$$- \frac{yy}{zz} = \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1} \right) \left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1} \right).$$

Первой множитель будетъ

дѣлѣ $\frac{2(ffqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$; а другой $= 2$

$\frac{(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, коихъ произведеніе $= \frac{4 ppqq-1}{(pp-1)^2}$

$\frac{(qq-pp)}{(qq-1)^2}$. Понеже знаменатель уже квадрата и числитель помноженъ на квадратъ 4, то надлежитъ только сдѣлать квадратомъ сію формулу $(ppqq-1)(qq-pp)$, или также сію $(ppqq-1)(\frac{qq}{pp}-1)$, что учинится, когда возмемъ $pq = \frac{ff+gg}{2fg}$ и $\frac{q}{p} =$

$\frac{bb+kk}{2bk}$, а понеже тогда каждой множи-

тель будетъ квадратъ $qq = \frac{ff+gg}{2fg} \cdot \frac{bb+kk}{2bk}$, то

сіи обѣ дроби помноживъ одну на другую должны произвести квадратъ, и слѣдовательно также ежели онѣ помножатся на $4ffggbbkk$ т. е. $fg(ff+gg)bk(bb+kk)$, которыя формулы съ прежними во всемъ сходны.

Положивъ $f=a+b$, $g=a-b$, $b=c+d$ и $k=c-d$ выдетъ $2(a^2-b^2) \cdot 2(c^2-d^2) = 4(a^2-b^2)(c^2-d^2)$, что учинится, какъ мы видѣли, ежели $aa=9$, $bb=4$, $cc=81$ и $dd=49$; или $a=3$, $b=2$, $c=9$ и $d=7$; откуда $f=5$, $g=1$, $b=16$

$b=16$ и $k=2$; по чему $pq=\frac{12}{5}$ и $\frac{q}{p}=\frac{260}{54}=\frac{65}{13}$

Сии два уравненія помноживъ между собою даюмъ $qq=\frac{65 \cdot 12}{13 \cdot 5}=\frac{12 \cdot 12}{13}$, слѣдов. $q=\frac{12}{\sqrt{13}}$ и по сему $p=\frac{4}{\sqrt{13}}$; отсюда $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}=-\frac{41}{9}$ и $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}=\frac{166}{23}$; но $x=-\frac{41}{9}z$, то для нахо-

жденія цѣлыхъ чиселъ, возми $z=153$, будемъ $x=-697$ и $y=185$, слѣд. 3 иско-

мая квадратныя числа будутъ слѣдующія:

$ax=485809$ будемъ $xx-yy=451584=(672)^2$

$yy=34225$ $yy-zz=10816=(104)^2$

$zz=23409$ $xx-zz=462400=(680)^2$

которые квадраты гораздо меньше, нежели какіе бы вышли, если бы взяли квадраты 3 хъ чиселъ x , y и z изъ прежняго вопроса.

1039.

Скажетъ нѣкто, что сіе рѣшеніе одною только пробою сыскано: ибо мы брали въ помощь прежнюю табличку; но мы сіе средство для того только употребляли, чтобъ самое меньшее рѣшеніе найти. А ежели на то не сможемъ, то помощію предписанныхъ правилъ бесконечное множество рѣшеній найти можно;

а именно когда въ послѣднемъ вопросѣ ,
главное дѣло состояши въ томъ , чтобъ
произведеніе $(ppqq-1) \cdot \frac{qq}{pp}-1$ было квадратомъ.
Понесже тогда $\frac{x}{z} = \frac{pf+1}{p-1}$ и $\frac{y}{z} = \frac{qf+1}{q-1}$, по взявъ
 $\frac{q}{p}=m$, или $q=mp$ формула наша будещъ
 $(mmp^2-1)(m-1)$, которая очевидно здѣ-
лается квадратомъ , когда $p=1$ и съ
знаменованіемъ придемъ насъ къ другимъ,
еслии положимъ $p=1+s$; ибо тогда
формула $(m-1)(m-1+4ms+6mss+4$
 $mms^2+ms^3)$, слѣд. раздѣливъ на квадратъ
 $(m-1)^2$ выдемъ $1+4\frac{ms}{m-1}+6\frac{mss}{m-1}+\frac{4mms^2}{m-1}+$
 $\frac{mms^3}{m-1}$. Взявъ ради краткости $\frac{ms}{m-1}=a$;
чтобъ формула $1+4as+6ass+4as^2+as^3$
была квадратомъ.

Положи ся корень $1+fs+gss$, ко-
его квадратъ есть $1+2fs+2gss+ffss$
 $+2fgs^2+ggs^2$ и опредѣли f и g такъ,
чтобъ первые 3 члена уничтожились; что
здѣлается , когда $4a=2f$, или $f=2a$, а
 $6a=2g+ff$, слѣд. $g=\frac{6a-ff}{2}=3a-2aa$; ос-
тальные же два члена дадутъ съ урав-
неніемъ: $4a+as=2fg+ggs$, откуда найдемъ-
ся

544 О НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ

ся $s = \frac{4a - 2fg}{gg - a} = \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9aa - a}$ т. е. $s = \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1}$, которую дробь раздѣливъ на $a - 1$ получится $s = \frac{4(2a - 1)}{4aa - 8a + 1}$.

Сіе знаменованіе дастъ намъ бесконечно много рѣшеній, потому что число m , изъ котораго происходитъ $a = \frac{mm}{mm - 1}$ по изволснiю взять можно, что мы изъяснить примѣрами намѣрены.

I. Пусть $m = 2$, будетъ $a = \frac{4}{3}$; почему

$$s = 4 \cdot \frac{\frac{4}{3}}{\frac{16}{9} - 1} = -\frac{60}{23}, \text{ откуда } p = -\frac{37}{23} \text{ и } q = -\frac{74}{23};$$

наконцѣ $\frac{x}{z} = \frac{949}{424}$ и $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4247}$.

II. Пусть $m = \frac{3}{2}$ будетъ $a = \frac{9}{5}$ и $s = 4 \cdot \frac{\frac{9}{5}}{\frac{81}{25} - 1} = -\frac{260}{11}$, слѣдов. $p = -\frac{219}{11}$ и $q = \frac{747}{11}$, откуда найдутся дроби $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$.

Одинъ особливо случай достоинъ примѣчанія, когда a будетъ квадратъ; что учинится ежели $m = \frac{5}{4}$, ибо тогда $a = \frac{25}{16}$; положи

положи ради краткости $a = bb$ такъ что наша формула будетъ $1 + 4bbs + 6bbss + 4bbss^2 + bbs^3$, коей корень пусть будетъ $1 + 2bbs + bss$, котораго квадратъ есть $1 + 4bbs + 2bss + 4b^2ss + 4b^2s^2 + bbs^3$, гдѣ два первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на ss даютъ $6bb + 4bbs = 2b + 4b^2 + 4b^2s$, откуда

$$s = \frac{6bb - 2b - 4b^2}{4b^2 - 4bb} = \frac{3b^2 - b - 2b^2}{2b^2 - 2bb} = \frac{3b - 1 - 2b^2}{2bb - 2b}$$

которая дробь еще на $b - 1$ раздѣлится и выйдетъ $s = \frac{1 - 2b - 2bb}{2b}$ и $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$. Мо-

жно бы было корень прежней формулы положить $1 + 2bs + bss$, коего квадратъ $1 + 4bs + 2bss + 4bbss + 4bbss^2 + bbs^3$, гдѣ первые и два послѣдніе члена уничтожаются; а остальные раздѣливъ на s даютъ $4bb + 6bbs = 4b + 2bs + 4bbs$, откуда $s = -2$ и $p = -1$, слѣдоват. $pp - 1 = 0$; но изъ сего ничего не найдется: ибо былъ бы $z = 0$. Въ прежнемъ случаѣ, гдѣ $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$, ежели $m = \frac{1}{2}$, то $a = \frac{1}{16} = bb$ и $b = \frac{1}{4}$.

откуда выйдет $p = \frac{17}{28}$ и $q = tr = \frac{17}{12}$, а изъ
сего $\frac{x}{z} = \frac{649}{1112}$ и $\frac{y}{z} = \frac{433}{1112}$.

1040.

Вопросъ. Найти 3 квадрата xx , yy и zz ,
коихъ бы сумма каждаго двухъ была
паки квадратъ?

Понеже сіи 3 формулы $xx + yy$, $xx + zz$ и $yy + zz$ должны быть квадратами, то раздѣливъ оныя на zz получаютъ слѣдующіе 3 квадрата: I) $\frac{xx}{zz} + \frac{yy}{zz} = \square$; II) $\frac{xx}{zz} + 1 = \square$; III) $\frac{yy}{zz} + 1 = \square$. Двѣ послѣдніе

формулы разрѣшатся, когда возмемъ $\frac{x}{z} =$

$\frac{pp-1}{2p}$ и $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q}$, по чему первая будетъ
 $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, которую помноживъ на 4

надлежитъ выйти квадрату т. е. $\frac{(pp-1)^2}{pp} + \frac{(qq-1)^2}{qq}$, или помноживъ шакожде на $ppqq$

будетъ

будетъ $qq(pp-1)^2 + pp(qq-1)^2 = 0$, что иначе учинивъ не можешь прежде нежели не будетъ извѣстенъ случай, въ которомъ сия формула квадратъ; но такой случай не скоро отгадать можно, чго ради къ другимъ приемамъ прибѣгнуть надлежитъ, изъ коихъ нѣкоторые мы здѣсь покажемъ.

I. Понеже реченную формулу изъяснить можно такъ: $qq(p+1)^2(p-1)^2 + pp(q+1)^2(q-1)^2 = 0$, то здѣлай чтобъ ея на квадратъ $(p-1)^2$ раздѣлить можно было, полагая $q-1=p+1$, или $q=p+2$, будетъ $q+1=p+3$, слѣдов. наша формула $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = 0$, которую раздѣливъ на $(p+1)^2$ долженъ выйти квадратъ, а именно $(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2$, которой изъясняется въ сей формулѣ $2p^2 + 8p^2 + 6pp - 4p + 4$. Понеже здѣсь послѣдней членъ квадратъ, то положи корень $2+fp+gpp$, или $gpp+fp+2$, котораго квадратъ есть $ggp^2 + 2fgp^2 + 4gpp + ffp^2 + 4fp + 4$, гдѣ f и g такъ

v 2

должно

должно опредѣлишь чтобъ 3 послѣд-
нїе члена уничтожились; что учини-
ся, когда $-4=4f$, или $f=-1$, а $b=$
 $4g+1$, или $g=\frac{5}{4}$; и тогда два первые
члена раздѣливъ на p^3 даюшъ $2p+8$
 $=g^2p+2fg=\frac{25}{16}p-\frac{5}{2}$, откуда $p=-24$,
 $q=-22$, а изъ сего найдемъ $\frac{x}{z}=\frac{rp-1}{2p}$
 $=-\frac{575}{48}$, или $x=-\frac{575}{48}z$, и $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{481}{44}$, или
 $y=-\frac{481}{44}z$.

Взявъ $z=16.3.11$ будетъ $x=575.11$,
а $y=483.12$, по чему 3 хъ искомымъ ква-
дратовъ корни будутъ слѣдующіе.

$$\begin{array}{ll} x=6325=11.27.15 & \text{откуда } xx+yy=2z^2(275^2+252^2)=2z^2.371^2 \\ y=5796=12.21.23 & xx+zz=11^2(575^2+44^2)=11^2.577^2 \\ z=528=3.11.16 & yy+zz=12^2(481^2+4^2)=12^2.485^2 \end{array}$$

II. Бесконечно многими способами можно
сїю формулу раздѣлить на квадраты;
положивъ на прим. $(q+1)^2=4(p+1)^2$, или
 $q+1=2(p+1)$ ш. е. $q=2p+1$ и $q-1$
 $=2p$, наша формула будетъ $(2p+1)^2$
 $(p+1)^2(p-1)^2+pp.4(p+1)^2.4pp=\square$, раздѣ-
ливъ на $(p+1)^2$ получимъ $(2p+1)^2(p-1)^2$
+16

$+16p^4 = 0$, или $20p^4 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1 = 0$, но отсюда ничего найти не лзя.

III. Взявъ $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, или $q-1 = 2(p+1)$ будетъ $q-2p+3$ и $q+1 = 2p+4$, или $q+1 = 2(p+2)$, по чему формулу нашу раздѣливъ на $(p+1)^2$ получится $(2p+3)(p-1)^2 + 16pp(p+2)$ т. е. $9-6p + 53p + 08p^3 + 20p^4$; сей формулы положи корень $= 3-p+gp$, котораго квадратъ есть $9-6p+6gpp+pp-2gp^2+g^2p^4$; для уничтоженія 3 членовъ возьми $53=6g+1$ будетъ $g=\frac{47}{6}$, а оставшіеся члены раздѣливъ на p^2 дадутъ $20p+68=gpp-2g\frac{47}{6}-\frac{25}{3}$, или $\frac{456}{9}p=\frac{256}{3}$, по чему $p=\frac{1}{3}$ и $q=1\frac{89}{36}$, откуда пакъ рѣшеніе слѣдуетъ.

IV. Положивъ $q-1=\frac{1}{3}(p-1)$ будетъ $q=\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}$ и $q+1=\frac{1}{3}p+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(2p+1)$, и формулу нашу раздѣливъ на $(p-1)^2$ получится $\frac{(p-1)^2}{9}$ $(p+1)^2 + \frac{6}{9}pp(2p+1)^2$; помноживъ на 81 выдетъ $9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73pp - 54p + 9$, гдѣ какъ первой, такъ и послѣдній членъ квадраты: для того возьми корень $= 20pp$

$20pr - 9p + 3$, котораго квадратъ есть $400p^2 - 360p^2 + 81pr + 120pr - 54p + 9$ и получится $472p + 73 = -360p + 201$, слѣдов. $p = \frac{2}{13}$ и $q = \frac{9}{13} - \frac{1}{4}$.

Можно также вмѣсто прежняго корня положить $20pr + 9p - 3$, котораго квадратъ $400p^2 + 360p^2 - 120pr + 81pr - 54p + 9$ сравнивъ съ нашею формулу дастъ $472p + 73 = 360p - 39$; слѣдов. $p = -1$: но сѣ знаменованіе ни малой пользы не приноситъ.

V. Можно также здѣлать, что формула наша на оба квадрата $(p+1)^2$, и $(p-1)^2$ раздѣлился. На сей конецъ возьми $q = \frac{pt+1}{p+1}$, и будетъ $q+1 = \frac{pt+p+t+1}{p+1}$, $\frac{(p+1)(t+1)}{p+1}$, и $q-1 = \frac{pt-p-t+1}{p+1} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+1}$; отсюда раздѣливъ нашу формулу на $(p+1)^2(p-1)^2$ выдетъ $\frac{(pt+1)}{(p+1)^2} + \frac{pp(t+1)^2(t-1)^2}{(p+1)^4}$, помноживъ на квадратъ

рашъ $(p+t)^2$ будетъ еще квадратъ, а
именно: $(pt+1)^2(p+t)^2 + pp(t+1)(t-1)^2$,
или $tt^2p^2 + 2t(tt+1)p^2 + 2tpp + 2t(tt+1)p$
 $+ (tt+1)^2pp + pp(tt-1)^2$

$+tt$, гдѣ какъ первой, такъ и по-
слѣдней членъ квадрата. Положивъ ко-
рень $=tt(p+(tt+1)p-t)$, котораго ква-
дратъ $tt^2p^2 + 2t(tt+1)p^2 - 2tpp - 2t(tt+1)p$
 $+ (tt+1)^2pp$

$p+tt$ и сравнивъ съ нашею формулою
будетъ $2tpp + (tt-1)^2p + 2t(tt+1)$
 $= -2tpp - 2t(tt+1)$, или $4tpp +$
 $(tt-1)^2p + 4t(tt+1) = 0$, или $(tt+1)^2p +$
 $4t(tt+1) = 0$, т. е. $tt+1 = -\frac{t}{p}$; откуда
 $p = \frac{-4t}{tt+1}$, $pt+1 = \frac{-3tt+1}{tt+1}$ и $p+t = \frac{t^2-3t}{tt+1}$,

слѣдов. $q = \frac{-3tt+1}{t^2-3t}$, гдѣ t по изво-
жно взяты можно.

Пусть будетъ на-
прим. $t=2$, будетъ $p=-\frac{5}{2}$ и $q=-\frac{11}{2}$, от-
куда найдемъ $\frac{x}{z} = \frac{pt-1}{2p} = \frac{20}{20}$ и $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q}$

$= -\frac{117}{44}$; слѣдов. $x = \frac{20}{44}z$, а $y = -\frac{117}{44}z$. Возми

теперь $z=4.4.5.11$, выйдетъ $x=3.13.11$
и $y=4.5.9.13$; почему прехъ искомымъ
квадратовъ корни $x=3.11.13=429$, $y=$

4.5.9.13=2340 и $z=4.4.5.11=880$, кои еще меньше прежде найденныхъ.

$$\begin{aligned} \text{А отсюда } xx+yy &= 3^2 \cdot 13^2 (121+3600) = 3^2 \cdot 13^2 \cdot 61^2 \\ xx+zz &= 11^2 (1521+6400) = 11^2 \cdot 89^2 \\ yy+zz &= 20^2 (13689+1936) = 20^2 \cdot 125^2 \end{aligned}$$

VI. На конецъ примѣчашъ мы при семъ вопросъ, что изъ каждаго рѣшенія еще другое найти можно: ибо когда сысканы сѣи знаменованія $x=a$, $y=b$ и $z=c$ такъ что $aa+bb=\square$, $aa+cc=\square$ и $bb+cc=\square$, то слѣдующія величины удовлетворяютъ $x=ab$, $y=bc$ и $z=ac$, откуда

$$\begin{aligned} xx+zz &= aabb+aac c = aa(bb+cc) = \square \\ xx+yy &= aabb+bbcc = bb(aa+cc) = \square \\ yy+zz &= aacc+bbcc = cc(aa+bb) = \square \end{aligned}$$

Но когда уже мы нашли $x=a=3.11.13$; $y=b=4.5.9.13$ и $z=c=4.4.5.11$, то получимъ отсюда слѣдующія рѣшенія:

$$x=ab$$

$$x=ab=3.4.5.9.11.13.13$$

$$y=bc=4.4.4.5.5.9.11.13$$

$$z=ac=3.4.4.5.11.11.13$$

кои всѣ 3 могутъ раздѣлиться на 4.5.11.13 3 и слѣдов. въ сѣи формулы сокращены будутъ $x=9.13$, $y=3.4.4.5$ и $z=4.11$, то есть: $x=117$, $y=240$ и $z=44$, кои еще меньше прежнихъ, и по сему

$$xx+yy=71289=(267)^2$$

$$xx+zz=15625=(125)^2$$

$$yy+zz=56536=(244)^2.$$

1041.

Вопросъ. Требуется два числа x и y . такъ что если одно придашь къ квадрату другаго, тобѣ вышелъ квадратъ, или сѣи двѣ формулы $xx+y$ и $yy+x$ должны быти квадратами?

Когда положимъ первую $xx+y=pp$, и найдемъ отсюда $y=pp-xx$, то другая формула $p^2-2px+x^2+x=\square$, коей рѣ-

В 5

шеніе

шеніе не легко усмотрѣть можно. Но положивъ для обѣихъ формулъ $xx+y=(p-x)^2=pp-2px+xx$ и $yy+x=(q-y)^2=qq-2qy+yy$, получимъ заразъ сіи два уравненія: I) $y+2px=pp$; II) $x+2qy=qq$, изъ которыхъ x и y найти не трудно, а именно: $x=\frac{2qpp-qq}{4pq-1}$ и $y=\frac{2pqq-pp}{4pq-1}$, гдѣ p и q по изволенію взять можно. Положи напр. $p=2$ и $q=3$, то получишь сіи два искомыя числа: $x=\frac{15}{23}$, и $y=\frac{12}{23}$ и тогда $xx+y=\frac{225}{529}+\frac{32}{529}=\frac{961}{529}=(\frac{31}{23})^2$, а $yy+x=\frac{1024}{529}+\frac{15}{529}=\frac{1369}{529}=(\frac{37}{23})^2$. Возми по томъ $p=1$, $q=3$ и будетъ $x=-\frac{3}{11}$, а $y=\frac{17}{11}$; понеже здѣсь одно число отрицательное, и сего бы рѣшенія можетъ быть принять не похотѣли, то положи $p=1$ и $q=\frac{3}{2}$, будетъ $x=\frac{3}{25}$, $y=\frac{7}{15}$, и получится $xx+y=\frac{9}{625}+\frac{7}{15}=\frac{299}{625}=(\frac{17}{25})^2$, а $yy+x=\frac{49}{225}+\frac{3}{15}=\frac{64}{155}=(\frac{8}{15})^2$.

1042.

Вопросъ. Найми два числа, коихъ бы сумма была квадратъ, а сумма бы ихъ квадратовъ биквадатъ?

Пусть

Пусть будутъ сіи числа x и y , и понеже $xx+yy$ долженъ быть биквадратъ, то зѣлай оной прежде квадратомъ; что учинися, ежели $x=pp-qq$, $y=2pq$, и будетъ $xy+yy=(pp+qq)^2$. А чинобы сіе было биквадратъ, то $pp+qq$ должно быть квадратомъ; чего ради возми $p=rr-ss$, $q=2rs$, и выдешъ $pp+qq=(rr+ss)^2$, откуда $xx+yy=(rr+ss)^2$, и слѣд. биквадратъ; но тогда будетъ $x=r^4-6rrss+s^4$, $y=4r^3s-4rs^3$, и остается только зѣлать квадратомъ сію формулу $x+y=r^4+4r^3s+6rrss-4rs^3+s^4$, коей корень положи $rr+2rs+ss$; слѣдов. наша формула равна сему квадрату $r^4+4r^3s+6rrss+4rs^3+s^4$; гдѣ первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на rss даюшъ $6r+4s=6r-4s$, или $12r-8s=0$; слѣд. $s=\frac{3}{2}r$, или можно также взять корень $rr+2rs+ss$, дабы четвертые члены уничтожились; но понеже квадратъ сего корня есть $r^4+4r^3s+6rrss-4rs^3+s^4$, то оставшіеся члены раздѣливъ на rrs даюшъ $4r-6s=-4r+6s$, или $8r=12s$, слѣд. $r=\frac{3}{2}s$, и когда $r=3$, и $s=20$, то нашелся бы

бы $x = -119$ отрицательной. Положимъ еще $r = \frac{3}{2}s + t$, то формула наша будетъ $rr = \frac{3}{2}ss + 3st + tt$; $r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}sst + \frac{9}{2}stt + t^3$

$$r^4 = \frac{81}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{27}{2}ssst + 6st^3 + t^4$$

$$+ 4r^3s = \frac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18ssst + 4st$$

$$- 6rrst = -\frac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6ssst$$

$$- 4rs^3 = -6s^4 - 4s^3t$$

$$+ s^4 = +s^4$$

$\frac{1}{16}s^4 + \frac{37}{2}s^3t + \frac{57}{2}ssst + 10st^3 + t^4$, которая формула должна быть квадратъ, и слѣд. также когда помножится на 16, т. е. $s^4 + 296s^3t + 408ssst + 160st^3 + 16t^4$, коея корень положи $= ss + 148st - 4tt$, котораго квадратъ есть $s^4 + 296s^3t + 21896ssst - 1184st^3 + 16t^4$. Здѣсь два первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на st даюшъ $21896s - 1184t = 408s + 160t$, слѣдов. $\frac{s}{t} = \frac{11840}{21880} = \frac{2368}{5470} = \frac{64}{1469}$. Взявъ $s = 84$ и $t = 1343$ будетъ $r = 1469$; а изъ сихъ чиселъ $r = 1469$ и $s = 84$ найдемъ $x = r^4 - 6rrs - s^4 = 4565486027761$ и $y = 1061602293520$.

ГЛАВА XV.

О разрѣшеніи вопросовъ, въ которыхъ
требуется кубы.

1043.

Въ прежней главѣ были такіе вопросы, гдѣ нѣкоторыя формулы должно было дѣлать квадратами и гдѣ мы довольно имѣли случай изъяснить разные приемы, помощью коихъ данныя правила въ дѣйствіе произвести можно. Теперь осталось еще разсмотрѣть такіе вопросы, гдѣ нѣкоторыя формулы надлежитъ дѣлать кубами, къ чему показаны уже въ прежней главѣ правила, кои чрезъ разрѣшенія нижеслѣдующихъ вопросовъ большее изъясненіе получаютъ.

1044.

Вопросъ. Найти два куба x^3 и y^3 , которыхъ бы сумма была также кубъ?

Когда

Когда $x^3 + y^3$ надлежитъ быть кубомъ, то формула сія раздѣленная на кубъ y^3 должна также кубомъ остаться, т. е. $\frac{x^3}{y^3} + 1$. Положивъ $\frac{x}{y} = z - 1$ получится $z^3 - 3zz + 3z$; что долженствуетъ быть кубомъ. По прежнимъ правиламъ можно взять кубичной корень $= z - u$, ко- его кубъ есть $z^3 - 3uz^2 + 3u^2z - u^3$ и опре- дѣлимъ u такъ чтобъ вторые члены уничтожились; тогда было бы $u = 1$, а остальные члены дали бы $3z = 3u^2z - u^3 = 3z - 1$, откуда найдется z бесконечной; но сіе знаменованіе намъ ни мало не служитъ. Оставивъ u неопредѣленнымъ получится сіе уравненіе $-3zz + 3z = -3uz^2 + 3u^2z - u^3$; и изъ сего квадратнаго уравненія опредѣлится величина числа z , а именно: $3uz^2 - 3zz = 3u^2z - 3z - u^3 = 3(u-1)zz = 3(u-1)z - u^3$, или $zz = (u+1)z - \frac{u^3}{3(u-1)}$ слѣдов. $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}\right)} = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-u^3 + 3u - 3u - 3}{12(u-1)}\right)}$. И такъ

все

все дѣло въ томъ состоитъ , чтобъ сло-
добръ дѣлать квадратомъ: сего ради по-
множимъ дробь вверху и внизу на $3(u-1)$
дабы знаменатель вышелъ квадратъ , а

именно
$$\frac{-3u^2 + 12u^2 - 18u + 9}{36(u-1)^2}$$
, кося дробь

числитель долженъ быть квадратъ , гдѣ
послѣдней членъ уже квадратъ. Возьми
теперь по прежнимъ правиламъ корень
 $= 3 + fu + gu$, или $gu + fu + 3$, кото-
раго квадратъ есть $ggu^2 + 2fgu^2 + 6gu +$
 $+ ffu + 2fu + 9$ и здѣлай чтобъ 3 по-
слѣдніе члены уничтожились , то про-
изойдетъ во первыхъ $0 = 2f$, т. е. $f = 0$,
а по томъ $6g + ff = -18$, по чему $g = 3$;
первыя же два члена раздѣливъ на u^2 да-
ютъ $-3u + 12 = ggu + 2fg = ggu$, слѣдов. $u = 1$,
которое знаменованіе ни къ чему насъ не
приведетъ. Положивъ $u = 1 + t$, формула
наша будетъ $-12t - 3t^2$, которая должна
быть квадратъ , чему статься не лзя ,
сжели t не будетъ отрицательнымъ ; и
такъ пусть $t = -s$, формула наша выдетъ
 $12s - 3s^2$, которая , когда $s = 1$ будетъ
квадратъ , но тогда бы нашлось $t = -1$

и $x=0$, откуда ничего найти не лзя. Но какъ бы мы за сіе дѣло ни принимались, то никогда не найдемъ шакого знаменованія, которое бы насъ привело къ нацсму намѣренію, и отсюда заподлинно заключить можно, что не лзя найти двухъ кубовъ, которыхъ бы сумма была кубъ. Сіе можно доказать слѣдующимъ образомъ.

1045.

Теорема. Не возможно найти двухъ кубовъ, коихъ бы сумма, или разность была кубъ. Здѣсь прежде всего примѣчать надлежитъ, что если сумма не возможна, то и разность также не возможна быть должна. Ибо когда не лзя чтобъ $x^3+y^3=z^3$, то не возможно также, чтобъ и $z^3-y^3=x^3$, а z^3-y^3 есть разность двухъ кубовъ. И такъ довольно показать невозможность изъ одной только суммы, или изъ одной разности, по тому что одна изъ другой слѣдуетъ. Самое же доказательство состоитъ въ слѣдующихъ положеніяхъ.

I.

I. Здѣсь можно принять, что числа x и y между собою недѣлимы: ибо ежели бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы ихъ кубы на кубъ онаго могли раздѣлиться: такъ напримѣръ, когда $x = 2a$ и $y = 2b$, то бы $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$ и естли бы сія сумма была кубъ, то надлежало бы также и $a^3 + b^3$ быть кубомъ.

II. Когда же x и y общаго дѣлителя не имѣютъ, то оба сіи числа или нечетныя, или одно четное, а другое нечетъ. Въ первомъ случаѣ должно бы быть z четное, въ другомъ же случаѣ нечетъ. И такъ изъ z и x чиселъ x , y и z два всегда нечетныя, а одно четное: чего ради возмемъ къ нашему доказательству оба нечетныя; ибо все равно покажемъ ли невозможность суммы, или разности, пошому что сумма перемѣнится въ разность, когда корень будетъ отрицательнымъ.

III. По сему пусть будутъ x и y нечетныя числа, то какъ сумма, такъ и разность ихъ будетъ четная. Для того положи $\frac{x+y}{2}=p$, $\frac{x-y}{2}=q$ и будетъ $x=p+q$ и $y=p-q$; откуда явствуетъ, что изъ двухъ чиселъ p и q одно четное, а другое нечетъ быть долженствуетъ. Чего ради $x^3+y^3=2p^3+6pq^2=2p(p^2+3q^2)$: и такъ надлежишь доказать, что произведеніе $2p(p^2+3q^2)$ кубомъ быть не можетъ. Если бы съ разности доказывать захотѣли, то было бы $x^3-y^3=6p^2q+2q^3=2q(q^2+3p^2)$, которая формула съ прежнею весьма сходствуетъ: ибо переставлены только буквы p и q , по чему довольно показать невозможность формулы $2p(p^2+3q^2)$, понеже отсюда несомнѣнно слѣдуетъ, что ни сумма, ни разность двухъ кубовъ кубомъ быть не можетъ.

IV. Если бы $2p(p^2+3q^2)$ было кубъ, то былъ бы онъ четной, и слѣд. на 8 дѣлимой; по чему осьмая часть нашей
фор-

формулы была бы цѣлое число, да при помѣ и кубичное; а именно $p(pp+3qq)$; но понеже изъ чиселъ p и q одно четное, а другое нечетно, то $pp+3qq$ будетъ нечетно и на 4 раздѣлиться не можетъ, откуда слѣдуетъ, что p на 4 дѣлимо, и слѣдов. будетъ цѣлое число.

V. Понеже произведение $p(pp+3qq)$ должно быть кубомъ, то каждой множитель порознь p и $pp+3qq$ долженъ быть кубомъ; а напротивъ когда они общаго дѣлителя не имѣютъ. Ибо если произведение изъ двухъ недѣлимыхъ между собою множителей должно быть кубомъ, то каждой самъ по себѣ долженъ быть кубомъ; когда же они общаго дѣлителя имѣютъ, то оной надлежитъ рассмотреть особливо; и такъ здѣсь вопросъ, могутъ ли имѣть множители p и $pp+3qq$ общаго дѣлителя; что разыскать должно. Если бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы и сѣи pp и $pp-3qq$ того же дѣлителя имѣли, и слѣдов.

сихъ послѣднихъ разность $3q^2$ съ pp того же бы самаго дѣлителя имѣли ; но p и q между собою недѣлимы , то и числа pp и $3q^2$ инаго общаго дѣлителя кромѣ 3 хъ не имѣютъ ; что дѣлается когда p на 3 дѣлится.

VI. Сего ради надлежитъ намъ рассмотреть два случая : первой когда множители p и $pp+3q^2$ общаго дѣлителя не имѣютъ , что случается , когда p на 3 раздѣлиться не можетъ ; а другой случай ежели они общаго дѣлителя имѣютъ , что бываетъ когда p на 3 дѣлимо. Сии два случая съ осторожностію различать надлежитъ ; потому что для каждаго особливое доказательство дано.

VII. Первой случай. Пусть будетъ p на 3 недѣлимо, и слѣд. наши оба множители p и $pp+3q^2$ между собою недѣлимы , то каждой самъ собою долженъ быть кубъ ; и по сему здѣлаетъ $pp+3q^2$ кубомъ, что учинится, ежели,
какъ

какъ выше показано ; $p+qV-3=(t+uV-3)^3$, а $p-qV-3=(t-uV-3)^3$, и было бы $pp+3qq=(tt+3uu)^3$, слѣд. кубъ ; но отсюда $p=t^3-9tu$ и $q=3tt-3u^3=3u(t-u)$. Понеже q есть нечетное число , то и должно быть также нечетъ , а t четъ : потому что иначе бы $t+u$ было бы четное число.

VIII. Понеже $pp+3qq$ кубомъ дѣлано и найдено $p=t(u-9uu)=t(t+3u)(t-3u)$, то надлежало бы также и p быть кубомъ , слѣдов. и $2p$; по чему сія формула $2t(t+3u)(t-3u)$ должна быть кубъ. Но здѣсь примѣчать надлежитъ во первыхъ , что t четное число и на 3 не дѣлимо : ибо въ противномъ случаѣ было бы и p также на 3 дѣлимо , кою-рой случай именно отсюда исключается ; слѣдов сн 3 множителя $2t$, $t+3u$ и $t-3u$ между собою не дѣлимы и для того каждой долженъ быть кубъ.

И такъ положивъ $t+3u=f^3$, $t-3u=g^3$,
будемъ $2t=f^3+g^3$; но теперь $2t$ естъ
Аа 3 также

также кубъ, и слѣдов. были бы здѣсь два куба f' и g' , которыхъ бы сумма дѣлала кубъ, и кои были бы несравненно менше съ начала взятыхъ кубовъ x^3 и y^3 : ибо когда положили мы $x = p + q$ и $y = p - q$, а теперь p и q опредѣлили буквами i и u , то числа p и q должны быть гораздо больше нежели i и u .

IX. По чему когда два такіе куба въ большихъ числахъ находятся, то можно бы было оныя также изъяснить въ гораздо меньшихъ числахъ, которыхъ бы сумма была также кубъ; и такимъ бы образомъ можно было прийти къ меньшимъ такимъ кубамъ: но въ малыхъ числахъ такихъ кубовъ заподлинно нѣтъ, по и въ большихъ числахъ оныя невозможны. Сіе доказательство подкрѣпляется и тѣмъ, что другой случай ведетъ насъ къ тому же, какъ мы пошчасъ увидимъ.

X. Другой случай. Пусть будстѣ p на 3 дѣлимо, а q нѣтъ; положивъ $p = 3r$
бу-

будетъ формула наша $\frac{1}{4}(9rr+3qq)$, или $\frac{1}{4}r(3rr+qq)$, которые оба множители между собою недѣлимы; пошому что $3rr+qq$ ни на 2, ни на 3 не дѣлился: ибо r равнымъ образомъ четное число, быть должно такъ какъ и p : чего ради каждой изъ сихъ двухъ множителей самъ по себѣ долженъ быть кубъ.

XI. Если мы другаго множителя $3rr+qq$ или, $qq+3rr$ здаемъ кубомъ, то найдемъ, какъ и прежде $q=2(t+u)$ и $r=3u(t-u)$, гдѣ надлежитъ примѣчать, что когда q было нечетъ, то здѣсь и t также нечетъ, а u четное число быть надлежитъ.

XII. Понеже $\frac{1}{4}$ также должно быть кубъ, и слѣдов. помноживъ на кубъ $\frac{1}{4}$ также, то $\frac{1}{4}$ т. е. $2u(t+u)=2u(t+u)(t-u)$ надлежитъ быть кубъ, которые 3 множителя между собою недѣлимы и слѣдов. каждой по себѣ долженъ быть кубъ. Но когда возмется $t+u=f^3$ и $t-u$

$t - u = g^3$, по слѣдуетъ отсюда $2u = f^3 - g^3$, что также надлежало бы быть кубомъ, по тому что $2u$ есть кубъ. Такимъ бы образомъ можно найти два гораздо меньше куба f^3 и g^3 , которыхъ разность была бы кубъ, и слѣдов. также такіе, которыхъ сумма дѣлаетъ кубъ: ибо надлежитъ только прибавить $f^3 - g^3 = b^3$, что будетъ $f^3 = b^3 + g^3$; и такъ имѣли бы мы два куба, которыхъ сумма также кубъ. Симъ прежне доказательство совершенно подкрѣпляется, что когда въ самыхъ большихъ числахъ такихъ кубовъ нѣтъ, которыхъ сумма или разность была бы кубъ, и сіе для того что въ самыхъ меньшихъ числахъ такихъ не находится.

1046.

Когда невозможно найти такихъ двухъ кубовъ, коихъ бы сумма или разность была кубъ, то прежней нашъ вопросъ

просъ уничтожается ; обыкновенно же начинаюмъ съ сего вопроса : какимъ образомъ найти три куба , которыхъ бы сумма дѣлала кубъ ? Изъ оныхъ два можно взять по изволенію , такъ что третьей только сыскать надлежитъ , которой вопросъ теперь мы рассмотримъ.

1047.

Вопросъ. Къ даннымъ двумъ кубамъ a^3 и b^3 найти еще третей , которой бы съ прежними вмѣстѣ составилъ кубъ ?

По сему формула $a^3 + b^3 + x^3$ должна быть кубъ , чего иначе учинить не лзя , какъ только что имѣемъ извѣстной случай. Сей случай самъ попадается , а именно когда $x = -a$, положивъ $x = y - a$ будемъ $x^3 = y^3 - 3ayy + 3aay - a^3$ и формула наша должна быть кубъ $y^3 - 3ayy + 3aay + b^3$, въ которомъ первой и послѣдней членъ кубы , то заразъ два рѣшенія найти можно.

I. По первому возми корень $= y + b$, ко-
его кубъ есть $y^3 + 3byy + 3bby + b^3$ и
получится $-3ay + 3aa = 3by + 3bb$, от-
куда $y = \frac{aa - bb}{a + b} = a - b$, слѣдов. $x = b$,
что намъ ни мало не служи́тъ.

II. Можно также положить корень $= b$
 $+ fy$, котораго кубъ есть $f^3y^3 + 3bfffy +$
 $+ 3bbfy + b^3$; опредѣли f такъ, чтобы
третье члены уничтожились. Сие здѣ-
лается когда $3aa = 3bbf$, или $f = \frac{aa}{bb}$,
первые же два члена раздѣливъ на yy
дають $y - 3a = f^2y + 3bff = \frac{a^2y}{b^2} + \frac{3a^2}{b^2}$; по-
множивъ на b^2 получится $a^2y + 3a^2b^2$,
откуда найдется $y = \frac{3a^2b^2 + 3ab^6}{b^6 - a^6} =$

$$\frac{3ab^2(a^2 + b^2)}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^2}{b^2 - a^2}; \text{ а отсюда } x = y - a =$$

$$\frac{2ab^2 + a^4}{b^2 - a^2}.$$

И такъ

И такъ изъ данныхъ обоихъ кубовъ a^3 и b^3 найдется корень третьяго искомаго куба ; а чпо бы оной былъ положительной , то надлежитъ только b^3 взять за самой болышей кубъ , что мы изъяснимъ нѣкоторыми примѣрами.

I. Пусть будутъ данные два куба 1 и 8, такъ что $a=1$ и $b=2$, то формула $9+x^3$ будетъ кубъ , когда $x=\frac{17}{7}$: ибо тогда выйдетъ $9+x^3=\frac{8000}{343}=(\frac{20}{7})^3$.

II. Положимъ данные два куба 8 и 27 , такъ, что $a=2$ и $b=3$, то формула $35+x^3$ будетъ кубомъ , когда $x=\frac{124}{15}$.

III. Пусть будутъ два данные куба 27 и 64 , такъ что $a=3$ и $b=4$, то выйдетъ сія формула $91+x^3$ кубомъ , когда $x=\frac{165}{37}$.

Еслили бы къ даннымъ двумъ кубамъ похотѣли еще болыше такихъ третьихъ искать , то должно бы въ первой формулѣ $a^3+b^3+x^3$ положить еще $x=2ab$

$\frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + x$, и тогда бы пришли мы къ подобной формулѣ, изъ которой новыя знаменованія вмѣсто x опредѣлить можно бы было; но сіе бы завело насъ въ превеликіе выкладки.

1048.

При семъ вопросъ попадаетъ удивительный случай, когда оба данныя куба равны между собою, или $b = a$: ибо тогда найдемъ $x = \frac{3a^4}{0}$, т. е. безконечной, и слѣдов. не получимъ никакого рѣшенія, чего ради сего вопроса, когда $2a^3 + x^3$ должно быть кубомъ, разрѣшить не можно. Пусть наприм. $a = 1$, и слѣдов. формула наша $2 + x^3$, по надлежитъ примѣчать, что какіе бы перемѣны предпріяты ни были, по все стараніе тщетно и никогда ошуда надлежащаго знаменованія для x найти не можно; по чему съ достовѣрностію заключаемъ, что къ удвоенному кубу никакого куба сыскать

НС

не лѣзя , которой бы съ онымъ вмѣстѣ составилъ паки кубъ , или сіе уравненіе $2a^3 + x^3 = y^3$ невозможно. Отсюда слѣдуетъ $2a^3 = y^3 - x^3$. слѣдов. также невозможно найти двухъ кубовъ, коихъ бы разность была удвоенной кубъ, что также и о суммѣ двухъ кубовъ раз. мѣтъ должно и слѣдующимъ образомъ доказано быть можетъ.

1049.

Теорема. Ни сумма, ни разность двухъ кубовъ удвоенному кубу никогда равна быть не можетъ , или сія формула $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ сама по себѣ невозможна, исключая $y=x$, которой случай чрезъ себя виденъ.

Здѣсь можно опять x и y взять за недѣлимые между собою числа : ибо естли бы они общаго дѣлителя имѣли , то бы и z также на онаго могъ раздѣлиться , и слѣдов. цѣлое уравненіе на кубъ бы онаго раздѣлилось. Понесъ $x^3 \pm y^3$ должно быть четное число , то обоимъ числамъ x и y надлежитъ быть нечетнымъ

нымъ ; по чему какъ сумма , такъ и разность ихъ будетъ чепная. И такъ положивъ $\frac{x+y}{2} = p$, а $\frac{x-y}{2} = q$, будетъ $x = p+q$, а $y = p-q$, и тогда изъ чиселъ p и q одно должно быть чепное , а другое нечепъ. Отсюда $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(pp + 3qq)$ и $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(3p^2 + qq)$, которыя обѣ формулы во всемъ между собою сходны : и такъ довольно будетъ показать , что формула $2p(pp + 3qq)$ удвоеннымъ кубомъ, каковъ $2x^3$, не будетъ , и слѣдов. сія $p(pp + 3qq)$ кубъ быть не можетъ ; чему доказательство въ слѣдующихъ положеніяхъ содержится.

I. Здѣсь опять два случая разсматривать можно , изъ коихъ первой , когда два множителя p и $pp + 3qq$ общаго дѣлителя не имѣютъ , и тогда каждой самъ долженъ быть кубъ. Другой же случай, когда они общаго дѣлителя имѣютъ , которой какъ уже мы прежде видѣли , не другой какой , какъ 3 , быть можетъ.

II. Первой случай. Пусть будетъ p на 3 не дѣлимо, и слѣдов. оба множители между собою не дѣлимы, по здѣлай сперва $pp + 3qq$ кубомъ, что учинится, когда $p = t(tt - 9uu)$ а $q = 3u(tt - uu)$, и тогда значеніе числа p долженствуетъ быть также кубъ; но t на 3 не дѣлимо, по тому что иначе бы p на 3 дѣлилось, по два множителя t и $tt - 9uu$ между собою не дѣлимы, и слѣдовательно каждой самъ долженъ быть кубъ.

III. Но послѣдней самъ состоитъ еще изъ двухъ множителей, а именно $t + 3u$ и $t - 3u$, кои между собою не дѣлимы. Понеже сперва t на 3 дѣлится не можетъ, а потомъ одно изъ чиселъ t и u четное, а другое нечетъ. Ежели бы оба были нечетныя, то не только бы p , но и q было четное, чему спастся не лзя, слѣдов. каждой изъ сихъ множителей $t + 3u$ и $t - 3u$ долженъ быть кубъ.

IV.

IV. И по сему возми $t+3u=f^3$, а $t-3u=g^3$, и будетъ $2t=f^3+g^3$, но t само по себѣ есть кубъ, которой пусть $=b^3$; и такъ имѣли бы мы $f^3+g^3=2b^3$, т. е. нашли бы мы два гораздо меньшіе куба, а именно f^3 и g^3 , которыхъ бы сумма была удвоенной кубъ.

V. Другой случай. Пусть будетъ p на 3 дѣлимо, а q нѣтъ, то положивъ $p=3r$ формула наша будетъ $3r(9rr+3qq)=9r(3rr+qq)$, которые оба множители между собою недѣлимы, и по сему каждой кубомъ быть должны.

VI. А что бы послѣдней кубомъ задѣлать, то возми $q=1(11-911)$, а $r=31(11-11)$, и тогда изъ чиселъ 1 и 11 одно четное, а другое нечетъ быть должно; ибо въ противномъ случаѣ оба числа q и r были бы четныя; отсюда найдется первой множитель $9r=271(11-11)$, которой также кубомъ быть долженъ, и слѣдов. раз-

дѣлен-

дѣлснной на 27 также , п. с.
 $u(11-111)=u(t+u)(t-u).$

VII. Понеже сіи 3 множителя также между собою недѣлимы , то каждой по себѣ кубъ быть долженъ : для того положи оба послѣдніе $t+u=f^3$, а $t-u=g^3$ и получится $2u=f^3-g^3$; когда шеперь u должно также кубомъ быть , то получимъ мы 2 куба въ гораздо меньшихъ числахъ f^3 и g^3 , которыхъ разность подобнымъ образомъ была бы удвоенной кубъ.

VIII. Когда въ малыхъ числахъ такихъ кубовъ нѣтъ, коихъ бы сумма, или разность была удвоенной кубъ , то явствуетъ , что и въ большихъ числахъ оныхъ не будетъ.

IX. Можно бы было сказать , что въ малыхъ числахъ такой случай и есть, а именно , когда $f=g$, и такъ бы прежнее доказательство насъ сбавить могло. Но когда $f=g$, то въ первомъ бы случаѣ было $t+3u=t-3u$, слѣдов. $u=0$: и такъ q было бы

Томъ II.

бы также $\equiv 0$. А мы положили $x = p + q$ и $y = p - q$, то бы первые два куба x^3 и y^3 были также между собою равны, копорой случай имянно исключается. Равнымъ образомъ и въ другомъ случаѣ, когда $f = g$, надлежало бы быть $t + u = t - u$, и слѣд. опять $u = 0$, по чему также $t = 0$ и $p = 0$, и первые бы кубы x^3 и y^3 были паки равны, о копоромъ случаѣ здѣсь вопроса нѣтъ.

1050.

Вопросъ. Найди вообще 3 куба x^3, y^3 и z^3 , коихъ бы сумма составила кубъ?

Мы уже видѣли, что ежели два изъ сихъ кубовъ возмущся за извѣстные, то опшуда завсегда третей опредѣлить можно, естли только два первые между собою не равны. Но по прежнему способу въ каждомъ случаѣ находить одно только знаменованіе для третьяго куба и весьма бы было трудно находить опшуда больше такихъ кубовъ.

Здѣсь

Здѣсь беремъ мы всѣ 3 куба за неизвѣстные; а чтобы показать общее рѣшеніе, то положимъ $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, вычитая z^3 съ обѣихъ сторонъ получимся $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$, которое уравненіе удовлетворяетъ слѣдующимъ образомъ.

I. Возьми $x = p + q$, $y = p - q$ и будетъ, какъ уже мы видѣли, $x^3 + y^3 = 2p(pp + 3qq)$; по томъ положи $v = r + s$, $z = r - s$, и найдемся $v^3 - z^3 = 2s(ss + 3rr)$, слѣдоват. должно быть $2p(pp + 3qq) = 2s(ss + 3rr)$, или $p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$.

II. Прежде уже видѣли, что $pp + 3qq$ никакихъ другихъ множителей не имѣетъ, кромѣ содержащихся въ самой сей формулѣ. Понеже обѣ сѣ формулы $pp + 3qq$ и $ss + 3rr$ неопмѣнно общаго дѣлителя имѣть должны, то пусть будетъ оной $= tt + 3uu$.

III. На сей конецъ положи $pp + 3qq = (ff + 3gg)(tt + 3uu)$ и $ss + 3rr = (bb + 3kk)(tt + 3uu)$, выдетъ $p = fi + 3gu$, $q = gi - fu$ и будетъ

$$pp = ffit + 6fgti + 9ggui, \quad qq = gggt - 2fgti + ffit, \quad \text{слѣдов.} \quad pp + 3qq = (ff + 3gg)tt + (3ff + 9gg)ui = (ff + 3gg)(tt + 3ui).$$

IV. Равнымъ образомъ изъ другой формулы получимъ $s = bt + 3ku$ и $r = kt - bu$; и отсюда $ss = bhtt + 6bktu + 9kkui$, $3rr = 3kktt - 6kkui + 3bbui$ и такъ $ss + 3rr = bb(tt + 3ui) + 3kk(tt + 3ui) = (bb + 3kk)(tt + 3ui)$. Но $s(ss + 3rr) = p(pp + 3qq)$, а отсюда выходитъ сіе уравненіе $(ft + 3gu)(ff + 3gg)(tt + 3ui) = (bt + 3ku)(bb + 3kk)(tt + 3ui)$, которое раздѣливъ на $tt + 3ui$ будемъ

$$ft(ff + 3gg) + 3gu(ff + 3gg) = bt(bb + 3kk) + 3ku(bb + 3kk), \quad \text{или} \quad ft(ff + 3gg) - bt(bb + 3kk) = 3ku(bb + 3kk) - 3gu(ff + 3gg), \quad \text{откуда}$$

$$t = \frac{k(bb + 3kk) - 3g(ff + 3gg)}{f(ff + 3gg) - b(bb + 3kk)} \quad \text{и.}$$

V. Для сысканія цѣлыхъ чиселъ, возьми $u = f(ff + 3gg) - b(bb + 3kk)$, и будемъ $t = 3k(bb + 3kk) - 3g(ff + 3gg)$, гдѣ 4 буквы f , g , b и k по изволенію взять можно.

VI. Нашедъ изъ сихъ четырехъ чиселъ знаменованія для t и u получится :
 I) $p = ft + 3gu$; II) $q = gt - fu$; III, $s = ht + 3ku$; IV) $r = kt - hu$ и наконецъ для разрѣшенія нашего вопроса $x = p + q$, $y = p - q$, $z = r - s$ и $v = r + s$, которое рѣшеніе есть общее , и что всѣ возможные случаи въ немъ содержащіяся : потому что во всемъ вычисленіи никакихъ произвольныхъ ограничиваній не дѣлано. Все искусство состоятъ въ томъ, чтобъ уравненіе наше на $tt + 3uu$ могло раздѣлиться, чрезъ что буквы t и u опредѣлены будутъ , простымъ уравненіемъ. Употребленіе сся формулы представлено быть можетъ бесконечно многими способами, чему мы предложимъ нѣкоторые примѣры.

I. Пусть будетъ $k = 0$, $h = 1$, найдемся
 $t = -3g(ff + 3gg)$ и $u = f(ff + 3gg) - 1$; откуда
 $p = -3fg(ff - 3gg) + 3fg(ff + 3gg) - 3g = -3g$; $q =$
 $-(ff + 3gg)^2 + f$, по томъ $s = -3g(ff + 3gg)$
 и $r = -f(ff + 3gg) + 1$, а отсюда наконецъ получится $x = -3g - (ff + 3gg)^2 + f$,
66 3 y

$y = -3g + (ff + 3gg)^2 - f$, $z = (3g - f)(ff + 3gg) + 1$
и наконец $v = -(3g + f)(ff + 3gg) + 1$.

Положивъ теперь $f = -1$ и $g = +1$ получится $x = -20$, $y = 14$, $z = 17$ и $v = -7$; по чему имѣемъ мы слѣдующее уравненіе $-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3$, или $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II. Пусть будетъ $f = 2$, $g = 1$, слѣдов. $ff + 3gg = 7$; по томъ $b = 0$, $k = 1$, по чему $bb + 3kk = 3$, будетъ $t = -12$, $u = 14$; откуда $p = 2t + 3u = 18$; $q = t - 2u = -40$, $r = t = -12$ и $s = 3u = 42$; слѣдов. получится $x = p + q = -22$, $y = p - q = 58$; $z = r - s = -54$ и $v = r + s = 30$, такъ что $-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3$, или $58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3$; но понеже всѣ корни на 2 могутъ раздѣлиться, то будетъ также $29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3$.

III. Возмемъ $f = 3$, $g = 1$, $b = 1$, $k = 1$ такъ что $ff + 3gg = 12$, $bb + 3kk = 4$ найдемъ $t = -24$ и $u = 32$, которые на 8 могутъ раздѣлиться. А понеже здѣсь дѣло состоитъ въ ихъ содержаніи, то положимъ $t = -3$, и $u = 4$, откуда $p = 3t + 3u = +3$;

а

а $q=1-3u=-15$, $r=1-u=7$ и $s=1+3u=+9$; слѣдов. $x=-12$; $y=18$, $z=-16$ и $v=2$, такъ что $-12^3+18^3-16^3=2^3$ или $18^3=16^3+12^3+2^3$, или раздѣливъ на 2, $9^3=8^3+6^3+1^3$.

IV. Возмемъ $g=0$, $k=b$, такъ что f и b опредѣлены не будутъ, то получится $ff+3gg=ff$ и $bb+3kk=4b^3$, откуда $t=12b^2$ и $u=f^2-4b^2$; потомъ $p-ft=12fb^2$, $q=-f^2+4fb^2$, $r=-12b^4-bf^2+4b^3=16b^4-bf^2$ и $s=3bf^2$; слѣдов. $x=t+q=16fb^2-f^2$; $y=p-q=8fb^2+f^2$, $z=r-s=16b^4-4bf^2$ и $v=r+s=16b^4+2bf^2$. Положимъ теперь $f=b=1$ найдется $x=15$, $y=9$, $z=12$ и $v=18$, а раздѣливъ на 3 получится $x=5$, $y=3$, $z=4$ и $v=6$ такъ что $3^3+4^3+5^3=6^3$. При семъ примѣчаніи достойно, что сіи три корня 3, 4, 5, единицею возрастаютъ; чего ради рассмотримъ, нѣтъ ли еще больше такихъ чиселъ.

1051.

Вопросъ. Требуется 3 числа въ арифметической прогрессіи, когдѣ разность $=1$, чтобы кубы оныхъ чиселъ составили вмѣстѣ кубъ? 664 Пусть

Пусть будетъ x среднее изъ сихъ чиселъ, то меньшее $= x-1$, а большее $x+1$; оныхъ кубы сложивъ вмѣстѣ даютъ $3x^3 + 6x = 3x(x+2)$, что должно ствуетъ быть кубомъ. Къ сему потребно знать одинъ случай, въ которомъ сѣ бываетъ, и по нѣкоторымъ пробамъ найдется $x=4$; чего ради по прежнимъ правиламъ положимъ $x=4+y$, и будетъ $xx=16+8y+yy$, $x^3=64+48y+12yy+y^3$, слѣдов. формула наша будетъ $216+150y+36yy+3y^3$, гдѣ первой членъ кубъ, а послѣдней нѣтъ. Сего ради возми корень $=6+fy$ и здѣлай чтобы первые оба члена уничтожились. Понеже кубъ онаго корня есть $216+108fy+18ffyy+f^3y^3$, то должно быть $150=108f$, и слѣдов. $f=\frac{25}{18}$; остальные же члены раздѣливъ на y даютъ $36+3y=18ff+f^3y=\frac{25^2}{18}+\frac{25^3}{18^2}y$, или $18^3 \cdot 36+18^3 \cdot 3y=18^3 \cdot 25^2+25^3y$, или $18^3 \cdot 36-18^3 \cdot 25^2=25^3y-3y \cdot 18^3$; почему $y=\frac{18^3 \cdot 36-18^3 \cdot 25^2}{25^3-3 \cdot 18^3}=\frac{18 \cdot 18 \cdot 36-25^2}{25^3-3 \cdot 18^3}$; $y=-\frac{824-25}{1871}=-\frac{799}{1871}$, слѣдов. $x=\frac{11}{1871}$.

Трудно

Трудно бы показалось сіе обращеніе въ кубы продолжать далѣе; но надлежитъ примѣчать, что вопросъ можно завсегда привести къ квадратамъ. Понеже $3x$ ($xx+2$) должно быть кубомъ, то положи оной $=x^3y^3$ и получишя $3xx+6=xxy^3$, слѣдов. $xx=\frac{6}{y^3-3}=\frac{36}{6y^3-18}$. Когда числитель сего дроби уже квадратъ, то нужно только знаменателя $6y^3-18$ здѣлать квадратомъ; къ сему потребно также знать одинъ случай, и понеже 18 на 9 дѣлится, а 6 только на 3, то y долженъ также на 3 дѣлиться: сего ради положи $y=3z$ и будетъ нашъ знаменатель $=162z^3-18$, которой раздѣливъ на 9 будетъ $18z^3-2$ и которой квадратомъ быть долженъ. Сіе здѣлается когда $z=1$. Для сей причины возьми $z=1+v$, то должно быть $16+54v+54vv+18v^3=\square$; положи теперь корень $=4+\frac{27}{4}v$, котораго квадратъ есть $16+54v+\frac{729}{16}vv$; почему $54+18v=\frac{729}{16}$; или $18v=-\frac{185}{16}$, слѣдов. $2v=-\frac{15}{16}$ и $v=-\frac{15}{32}$; откуда найдется $z=1+v=-\frac{17}{32}$, по томъ $y=-\frac{36}{32}$.

Разсмотримъ теперь прежняго знаменателя, которой былъ $6y^3 - 18 - 162z - 18 = 9(18z^3 - 2)$, но сего множишся $18z^3 - 2$ клали мы квадратной корень $= \frac{107}{128}$; слѣд. квадратной корень изъ всего знаменателя есть $\frac{321}{128}$; а изъ числителя оной есть 6, откуда $x = \frac{6 - \frac{256}{107}}{\frac{321}{128} - \frac{107}{128}}$, которое знаменованіе отъ прежняго совсемъ различно, и по сему корни нашихъ прехъ кубовъ будутъ слѣдующіе: I) $x - 1 = \frac{149}{107}$; II) $x = \frac{256}{107}$, III) $y + 1 = \frac{363}{107}$, коихъ кубы сложенные въ одну сумму производятъ кубъ, котораго корень будетъ $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{51}{31} = \frac{408}{107}$.

1052.

Симъ намѣрены мы заключить сію часть неопредѣленной Аналитики: ибо изъ приложенныхъ вопросовъ имѣли уже мы случай изъяснить знаменитѣйшіе пріемы употребительнѣйшіе по сіе мѣсто въ сей наукѣ.









2A

